புதுக்கவிதைத் தொகுப்புக் களஞ்சியம் - I

அ. ராஜகோபால்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—155

புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்-I

(இயற்கணிதம்—திரிகோணமிதி)

ஆசிரியர்

கு. இராஜகோபாலன், எம்.ஏ., எல்.டி.,

முதல்வர்,

சர் தியாகராய கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—July, 1968.

B.T.P. No. 155.

MATHEMATICS for P.U.C

K. RAJAGOPALAN

Price Rs. 7-00

Printed by
WELDUN PRESS,
146, Thiruvotriyur High Road,
Washermanpet, Madras-21.

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஏழு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 155ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 190 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலைமண்டபத்தில் கொலு வீற்றிருக்கிறாள். எனவே, இவ் அன்னையை வாழ்த்துவோமாக! உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை: ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பாகம் I—இயற்கணிதம்

பாகம் II—திரிகோணமிதி

பாகம் I—இயல்கணிதம் (Algebra)

I. மீதித்தேற்றமும் அதன் பிரயோகங்களும் (Remainder Theorem and its Applications)

1. விகித முழுச்சார்புகள் அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Rational Integral functions or polynomials)

பின்வரும் கோவைகளைக் கவனிக்க :

(i) $x+7$ (ii) $3x^2-2x+5$ (iii) $x^3+\frac{1}{2}$

(iv) $9x^5-5x^4-4x^2+7x-6$ (v) $\sqrt{2}\,x^3-\frac{1}{4}\,x^2-5$

மேற்கண்ட கோவைகள் விகித முழுச் சார்புகளுக்கு உதாரணங்கள் ஆகும். அவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்றும் கூறப்படும்.

இங்கு 'x' என்னும் மாறி (variable), ஓர் உறுப்பின் பகுதி (denominator) யிலாவது, மூலக்குறியீடு பெற்றுவது வாராமையை நோக்குக.

குறிப்பு (i) இந்த விகித முழுக்கோவையில், குணகங்கள் (Coefficients) மூலக்குறிக்குள்ளோ அல்லது பின்னங்களாகவோ வரலாம். ஆனால், அட்சரங்களின் அடுக்குக் குறிகள் தன முழு எண்களாகவே (positive integers) இருக்கவேண்டும்.

(ii) $x+3\sqrt{x}-5$ என்னும் கோவையில் x வர்க்கமூலமாக வருவதால், இக்கோவை விகிதப் பொருத்தமிலாச் சார்பு அல்லது **விகிதமுறாச் சார்பு** (irrational function) எனப்படும்.

(iii) $x+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+7$ என்னும் கோவையில் x ஆனது பின்னத்தின் பகுதியில் இருப்பதால், இது பின்னச் சார்பு (fractional function) எனப்படும்.

(iv) **பெரும்பாலும் உபயோகமாகும் சார்புகள் விகித முழுக் கோவைகளேயாகும்.** (பொதுவாக விகிதமுறுச் சார்புகளும், பின்னச் சார்புகளும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை அல்ல.)

வரையறை (Definition)

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ மாறிலிகளாகவும் (constants), n தன முழு எண்ணுகவும் உள்ள $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_n$ என்னும் வடிவமைந்த சார்பு, x-ன் n படியுடைய விகித முழுச்சார்பு அல்லது x-ன் பல்லுறுப்புக்கோவை யென்று வழங்கப்படும்.

குறிப்பு : ஒருபடிச் சார்புகள் (Linear or first degree function), இருபடிச் சார்புகள் (Quadratic functions), கனச் சார்புகள் (cubic functions) முதலியன பல்லுறுப்புக் கோவையின் சிறப்பு வகைகள் ஆகும்.

(v) முற்றொருமை (சர்வசமம்) Identity : இரண்டு கோவைகளோ அல்லது சார்புகளோ முற்றொருமை யுற்றுநின்றால், அவற்றுள் வரும் மாறிகள் பெறும் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் அவையொத்த எண் மதிப்பு உடையனவாகும்.

உதாரணம்

(i) $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

(ii) $x^2-a^2 \equiv (x+a)\ (x-a)$

2. மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையான $f(x)$ **ஐ,** $(x-a)$**ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதி** $f(a)$ **ஆகும்.**

நிரூபணம் :

$f(x)$ஐ $(x-a)$ஆல் வகுக்குங்கால், வரும் ஈவு $Q\ (x)$ எனவும், மீதி R ஆகவும் கொள்க. $f(x)$, n படியுடையதானுல், $Q\ (x)$ ஆனது

$(n-1)$ படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். மீதியின்படி (degree) வகு எண்ணின் படிக்குக் குறைந்திருக்க வேண்டு மாகையால், R ஆனது ஒரு மாறிலியாகும். அதாவது, Rல் x உறுப்பு இராது.

வகுத்தல் விதிப்படி $(x-a)\,Q\,(x)+R\equiv f(x)$ எனப்பெறுகின்றோம். இஃதொரு முற்றொருமை யாகையால், x ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் ஏற்புடைத்தாகும். ஆகவே, $x=a$ என்று இடுக.

அப்பொழுது, $(a-a)\,Q(a)+R=f\,(a)$

[R-ல் x உறுப்பு இல்லாததால் அதன் மதிப்பு மாறாது.]

அதாவது, $0\times Q\,(a)+R=f\,(a)$

$$\therefore\quad R=f\,(a)$$

குறிப்பு 1: $f\,(x)$ஐ $(x+a)$ ஆல் வகுத்தால், வரும் மீதி $f\,(-a)$ஆகும்.

2. $f\,(x)$ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுத்தால், வரும் மீதி $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம்: காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையான $f\,(x)$ல், x க்குப் பதிலாக a ஐ உபயோகிக்க $f(a)=0$ என வருமானால், $(x-a)$ என்பது $f(x)$ன் காரணி அல்லது குணங்கமாகும்.

இது காரணித் தேற்றம் அல்லது குணங்கத் தேற்றம் என்றறியப்படும்.

முக்கியமாக $(x-1)$, $(x+1)$ ஆகியவைகள் எப்பொழுது ஒரு கோவையின் காரணிகளாக வரும் எனத் தெரிந்துகொள்வது அவசியம்.

$px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ என்னும் கோவையை $(x-1)$ஆல் வகுத்தால் மீதி $p+q+r+s+t$ ஆகும். எனவே, $p+q+r+s+t=0$ ஆகுமானல், $(x-1)$ காரணி ஆகும்.

அஃதாவது, **குணகங்களின் கூடுதல்** 0 **ஆனல்,** $(x-1)$ **ஆனது கோவையின் காரணியாகும்.**

அதே கோவையை $(x+1)$ஆல் வகுக்க, மீதி $p-q+r-s-t$ எனவரும்,

$\therefore\quad p-q+r-s+t=0$ ஆகுமானால், $x+1$ காரணியாகும்.

அஃதாவது, $p+r+t=q+s$ எனில், $x+1$ காரணி ஆகும். ஆகையால், x ன்சார்பிலுள்ள இரட்டைப்படி உறுப்புக்களின் குணகங்களும் தனி உறுப்பும் சேர்ந்து ஒற்றைப்படி உறுப்புக்களின் குணகங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானால், $x+1$ ஆனது கோவையின் காரணியாகும்.

மாதிரி 1

$x^3-x^2-8x+12$ என்னுங் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.

குணகங்களின் கூடுதல் $1-1-8+12\neq0$

$\therefore$ $x-1$ காரணி அல்ல.

மேலும், இரட்டைப்படி உறுப்புக்களின் குணகங்களும் தனி உறுப்பும் சேர்ந்து $-1+12=11.$ (i)

ஒற்றைப்படி உறுப்புக்களின் குணகங்களின் கூடுதல்

$1-8=-7$ (ii)

(i) லுள்ள தொகை (ii) லுள்ள தொகைக்குச் சமமாகவில்லை.

$\therefore$ $x+1$ காரணி அல்ல.

$f(x)\equiv x^3-x^2-8x+12$ எனக் கொள்க.

$x=2$, என்றால்,

$f(2)=8-4-16+12=0$

$\therefore$ $x-2$ ஒரு காரணியாகும்

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=(x-2)\ (x^2+x-6)\\&=(x-2)\ (x+3)\ (x-2)\\&=(x-2)^2\ (x+3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}2 & 1-1-8+12\\ & \ \ +2+2-12\\\hline & 1+1-6\ |\ 0\end{array}$$

மாதிரி 2

$2x^4+(2a+3b)\ \ x^3-12x^2+(a-5b)\ \ x-6$ **என்னுங்கோவை x^2+x-6 ஆல் சரியாக வகுபடுமானால், a, bன் மதிப்புக்களையும், மற்ற காரணிகளையுங் கண்டு பிடிக்க.**

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

தீர்வு

$x^2+x-6=(x+3)\ (x-2)$ ஆகும்.

$f(x)=2x^4+(2a+3b)x^3-12x^2+(a-5b)x-6$ ஆனால், மீதித் தேற்றத்தின்படி $f(2)$ம், $f(-3)$ம் பூஜ்ஜியமாதல் வேண்டும். ஆகவே, கொடுத்த கோவையில், x க்கு 2 ஐப் பிரதியிட

$$32a+16a+24b-48+2a-10b-6=0$$

அஃதாவது, $\quad 18a+14b=22$

$\therefore \quad 9a+7b=11 \qquad$ (i)

மீண்டும் அக்கோவையில் xக்கு -3 ஐப் பிரதியிட

$$162-54a-81b-108-3a+15b-6-0$$

அஃதாவது, $\quad -57a-66b+48=0$

$\therefore \quad 19a+22b=16 \qquad$ (ii)

(1), (2) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b க்களை விடுவிக்குமிடத்து

$$a=2; \quad b=-1$$ **ஆகும்.**

மேல், ஆர்னர் (Horner) கண்டுபிடித்த தொகுப்பு வகுத்தல் முறை (Synthetic Division)யைப் பயன்படுத்தி எஞ்சிய காரணிகளைக் கண்டறியலாம். அஃதாமாறு :

2	2	1	-12	7	-6
		4	10	-4	6
-3	2	5	-2	3	0
		-6	3	-3	
	2	-1	1	0	

$\therefore$ எஞ்சிய காரணி $2x^2-x+1$ ஆகும்.

மாதிரி 3

$ax^4+bx^3-18x^2+15x-5$ என்னுங் கோவை x^2-3x+2ஆல் வகுபடும்பொழுது $4x-7$ ஆனது மிச்சமாகுமானால், a, bக்களின் மதிப்பைக் கண்டறிக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

தீர்வு

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

கொடுத்த கோவை x^2-3x+2ஆல் வகுபடுங்கால், வரும் ஈவு $Q(x)$ என்க.

மிச்சம் $4x-7$ (கணக்கின்படி)

$\therefore \quad ax^4+bx^3-18x^2+15x-5\equiv(x-1)(x-2)\,Q(x)+4x-7$

$x=1$ என்று பிரதியிட,

$$a+b-18+15-5=4-7$$

அஃதாவது, $a+b=5$ (i)

$x=2$ என்று பிரதியிட,

$$16a+8b-72+30-5=8-7$$

அஃதாவது, $2a+b=6$ (ii)

(i), (ii) என்னும் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காணில்,

$a=1,\ b=4$ **எனப் பெறப்படும்.**

மாதிரி 4

$x^3-49x+a=0$ என்பதற்கு 3 ஒரு மூலமானால், aன் மதிப்பையும், பிற மூலங்களையும் கண்டறிக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

$f(x)\equiv x^3-49x+a$ என்க.

$x^3-49x+a=0$க்கு ஒரு மூலம் 3 ஆதலின், $f(x)$க்கு $(x-3)$, ஒரு காரணியாகும். ஆகவே, மீதித் தேற்றத்தின்படி, $f(3)=0$ ஆகும்.

$$f(3)=3^3-49\times3+a=27-147+a=a-120$$

$\therefore \quad a-120=0;$ அல்லது $a=120$

இனி, $x^3-49x+120$ ஐ $(x-3)$ஆல் வகுக்குங்கால்,

$x^2+3x-40$ ஆம்.

ஆனால், $x^2+3x-40=(x+8)(x-5)$ஆம்.

$\therefore$ மற்ற மூலங்கள் $x=-8;\ x=5$ ஆம்

பயிற்சி 1·1

1. $3x^3-4x^2+5x-7$ என்னும் கோவையானது (முறையே) (i) $(x-2)$ (ii) $(x+3)$ (iii) $(2x-1)$ (iv) $(3x+5)$ என்பவற்றால் வகுபடும் பொழுது வரும் மீதிகளைக் காண்க.

[விடை : 11, -139, $-5\frac{1}{8}$, $-40\frac{1}{3}$]

2. $5x^3+kx^2-3x-27$ க்கு $(x-3)$ காரணியானால், k ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை: $k=-11$]

3. $2x^3+3x^2+mx-5$ ஆனது $(2x+5)$ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடுமானால், m ன் மதிப்பென்ன?

[விடை : $m=-7$]

4. $3x^2-2x+p=0$ ம், $6x^2-17x+12=0$ ம் ஒரு பொது மூலம் கொள்ளுமானால், p ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை: $p=-\frac{8}{3}$ அல்லது $-\frac{15}{4}$]

5. x^2+lx+m என்னும் கோவைக்கும், x^2+px+q என்னும் கோவைக்கும் $x+1$ ஒரு பொதுக்காரணியானால், $l-m=p-q$ என நிரூபி.

6. $px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ ஆனது (i) $(x-1)$ (ii) $(x+1)$ (iii) (x^2-1) என்பனவற்றால் மீதியின்றி சரியாக வகுபடுதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க.

7. $3x^7-7x^3-4$ ஆனது x^2+2x+1ஆல் மீதியின்றி சரியாக வகுபடும் என்று காட்டுக.

8. $2x^5+x^3+ax+b$ ஆனது x^2+x-2ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடுதற்கு a, b க்களின் மதிப்புகளை அறிக.

[விடை : $a=-25$; $b=22$]

9. $6x^4+kx^3+30x^2+lx-10$ ஆனது $6x^2+x-2$ஆல் மீதியின்றி சரியாக வகுபடுமானால், k, l என்பவற்றின் மதிப்புக்களை அறிக.

[விடை : $k=3$; $l=1$]

10. $x^2+(l-1)x+(m+3)$ ம், $x^2+(l+10)x-(m+1)$ ம் தனித் தனியாக $(x-2)$ ஆல் மிச்சமின்றி சரியாக வகுபடுமானால், l, m என்பவற்றின் மதிப்புக்கள் யாவை ?

[விடை, $l=-7$; $m=9$]

11. $x-q$ ஆனது $4x^3-(3q+2)x^2-(q^2-1)x+3$ என்றதற்குக் காரணியாவதற்கு q ன் மதிப்புக்கள் யாவை யென்றறிக. இக்கோவையின் எஞ்சிய காரணியை q ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒத்ததாக எழுதுக.

12. $x^5-x^4+ax^3+bx^2+cx+2$ என்னுங் கோவைக்கு $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+1)$ என்னும் ஒவ்வொன்றும் காரணி யானால், a, b, c க்களின் மதிப்புக்களை நிர்ணயிக்க.

[விடை : $a=-2$; $b=-1$; $c=1$]

13. p ன் மதிப்பு என்னவாயினும், $x^4+(p-3)x^3-(3p-5)x^2+(2p-9)x+6$ என்னும் கோவைக்கு $(x-1)$ ம், $(x-2)$ ம் காரணிகள் எனக்காட்டுக. மேற்கண்ட கோவைக்கு $(x+1)$ம் மற்றொரு காரணியாவதற்கு p ன் மதிப்பை நிர்ணயிக்க. p இந்த மதிப்பு கொள்ளும்போது, எஞ்சிய காரணியைக் கண்டறிக.

[விடை : $p=4$; $x+3$]

14. $x-2$, $x-3$, $x+3$ என்பவற்றால் வகுபடும்பொழுது முறையே 9, 24, -6 என்பன மீதிகளாகக் கிடைத்தற்குரிய இருபடிச் சார்பினைக் கண்டறிக.

[விடை : $2x^2+5x-9$]

15. $(2x-1)$ என்பது $6x^3+ax^2+14x-5$க்குக் காரணியானால், அது $10x^2-ax-8$ என்பதற்குங் காரணியாகுமென்று நிரூபிக்க.

16. (i) n, ஒரு முழுஎண்ணைக் குறித்தால், x^n-y^n எப்பொழுதும் $x-y$ ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டுக.

(ii) x^n-y^n என்றதனுள் n இரட்டைப்படை யெண்ணானால், $(x+y)$ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

(iii) x^n+y^n ஆனது $(x-y)$ ஆல் வகுபடாது எனக்காட்டுக.

(vi) x^n+y^n என்றதனுள் n ஒற்றைப்படை யெண்ணுனல் $(x+y)$ ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டுக.

17. $f(x)$ என்னும் விகித முழுச்சார்பு $(x-a)(x-b)$ ஆல் வகுபடுமாறுல், வரும் மீதி $Ax+B$ ஆம் வடிவில் அமையும் என்று காட்டுக. மேலும், இங்கு $A=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$; $B=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ என்றும் காட்டுக.

18. $x^3+ax^2+11x+6$, $x^3+bx^2+14x+8$ என்பன x^2+px+q என்னும் வடிவுடைய பொதுக்காரணியைப் பெறுமாறுல், a, b க்களின் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை $a=6$; $b=7$)

19. $lx^4-12x^3+mx^2+19x+15$ என்னும் கோவைக்கு $(x-1)$ம், $(2x+3)$ம் காரணிகளாறுல். l, m ன் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக. மீதிக் காரணிகளையும் காண்க ;

[விடை $l=8$; $m=-30$; $2x+1$;$2x-5$]

20. காரணிப்படுத்துக

(i) $x^3-6x^2+11x-6$

[விடை $(x-1)(x-2)(x-3)$]

(ii) $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$

3. ஓரின (Homogeneous), சமச்சீர் (Symmetric), வட்டச்சீர்க் (cyclic) கிரமங்கள்.

வரையறைகள்

(i) **ஓரினக்கோவை** (Homogeneous Expression)

ஒரு கோவையினது உறுப்புக்களெல்லாம் **ஒரே தரம்** (degree) **அல்லது படி** யுள்ளவையா யிருந்தால், அஃது ஓரியல் கோவை அல்லது ஒரு படித்தான கோவை அல்லது ஓரினக் கோவை யெனப்படும்.

உதாரணம்

$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ என்பது x, y என்னும் மாறிகளில் மூன்று படியுடைய ஓரினக்கோவையாகும்.

(ii) **முழுச்சீர் அல்லது சமச்சீர்க் கோவைகள்** (Symmetrical expressions) :

ஒரு கோவையில் ஏதாவது இரண்டு மாறிகளை யொன்றுக்கொன்று மாற்றியமைத்தாலும், அக்கோவை வடிவு வேறுபடாமல் நிற்குமாயின், அம் மாறிகளைப் பொருத்தமட்டில் அது முழுச்சீர் அல்லது சமச்சீர்க் கோவை யெனப்படும்.

குறிப்பு : சமச்சீர் உள்ள கோவைகளில் ஒரேமாதிரி உறுப்புக்களின் குணகங்கள் சமமாய் இருக்கும்.

உதாரணம்

$3x^3+3y^3+3z^3-2x^2-2y^2-2z^2-xy-yz-zx$ என்னும் கோவை x, y, z என்பனவற்றில் சமச்சீருள்ளதாகும்.

(iii) **ஓரினச் சமச்சீர்க்கோவைகள்** (Homogeneous and Symmetrical expressions) :

ஒரு கோவை ஓரினமாகவும், சமச்சீருள்ளதாகவும் இருந்தால், அஃது ஓரினச் சமச்சீருள்ள கோவை எனப்படும்.

மாறிகள் x, y ஆனால், படி 1, 2, 3ல் ஓரினச் சமச்சீருள்ள கோவையின் பொது ரூபங்கள் முறையே

$a(x+y)$;

$a(x^2+y^2)+bxy$;

$a(x^3+y^3)+b(x^2y+xy^2)$ ஆம்.

மாறிகள் x, y, z ஆனால், படி 1, 2, 3 ல் ஓரினச்சமச்சீருள்ள கோவைகளின் பொதுரூபங்கள் முறையே

$a(x+y+z)$;

$a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$;

$a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+cxyz$

எனவாகும்.

(iv) வட்டச்சீர்க்கோவைகள் (Cyclic Symmetrical Expressions)

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ என்னும் கோவையில் aயும் bயும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றியமைக்கப்பட்டால், அக்கோவை $b^2(a-c)+a^2(c-b)+c^2(b-a)=-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ என்ருகும், இது முந்திய கோவையோடு இராசிக் குறியால் வேறுபடுவதாகின்றது. ஆகையால், மேற்கண்ட கோவை முழுச்சீர் பெருமையை நோக்குக.

எனினும், இக்கோவையில் ஒருவகை சீர் காணப்படுகிறது. கொடுத்துள்ள கோவையில் $a^2(b-c)$ என்னும் முதல் உறுப்பிலுள்ள எழுத்துக்களை வட்டச்சீராக மாற்றியமைத்தால் அதாவது aக்குப் பதில் bயும், bக்குப் பதில் cயும், cக்குப் பதில் aயும் எழுதினுல், $b^2(c-a)$ என்னும் இரண்டாவது உறுப்பு உண்டாகக் காண்கிரும். இரண்டாவது உறுப்பில் இதே மாறுதல்களைச் செய்தால் மூன்ருவது உறுப்பும், மூன்ருவது உறுப்பில் இம்மாறுதல்களைச் செய்ய முதலுறுப்பும் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு, **தம்மிடத்துள்ள எழுத்துக்களை வட்டச்சீராக மாற்றியமைத்தாலும் வேறுபாடு எய்தாத கோவைகள் வட்டச்சீர்க் கோவைகள் எனப்படும்.**

இரண்டு வட்டச் சீர்க்கோவைகளின் பெருக்கற் பலனும், அல்லது வகுத்தற் பலனுகிய ஈவும் வட்டச் சீர்க்கோவைகளாகவே இருக்குமென்பது தெளிவுறும்.

(v) **ஸிக்மா குறியீட்டுமுறை :** ஒரு கோவையானது ஒரே மாதிரி யான உறுப்புக்களால் புணர்ப்புற்று நின்ருல், அதன் முதலுறுப்பின் முன் மட்டும் கிரேக்க மொழி எழுத்தாகிய Σ (sigma) என்ற அடையாளத்தைக் கொடுத்து அக்கோவை முழுவதையும் சுருக்கமான வடிவில் எழுதலாம்.

$\sum_{x,y,z} x$ என்பது $x+y+z$ க்குப் பதிலாகும்.

$a\sum_{x,y,z} x^2+b\sum_{x,y,z} xy$ என்பது $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$

என்னுங் கோவையின் சுருங்கிய வடிவமாகும்.

$\Sigma(a-b)(x-a)$ என்பதில் மாறிகள் a, b, c ஆகும்.

$a, b, c,$

எனவே, $\Sigma(a-b)(x-a)$யை விவரிக்க,

a, b, c

$(a-b)(x-a)+(b-c)(x-b)+(c-a)(x-c)$ என வரும்.

பயிற்சி ; பின்வரும் வட்டச் சீர்க்கோவைகளை முழுவதாக எழுதிச் சுருக்குக :

(i) $\Sigma\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(b^2+c^2-a^2)$ (ii) $\Sigma(a-b)(a+b-c)$

மாதிரி 1 : காரணிப்படுத்துக: $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$;
(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

கொடுத்த கோவையானது a, b, c ல் நான்காம் படியுள்ள உறுப்புக்கள் மட்டும் அடங்கிய ஓரின வட்டச்சீர்க் கோவையாகும். இக்கோவையில் $a=b$ என்று பிரதியிட, கோவை மறைவுபடுகிறது. ஆகவே, $(a-b)$ ஒரு காரணியாகும். இதைப்போலவே, ஓரின வட்டச் சீருடைமை பற்றி $(b-c)$, $(c-a)$ என்பனவும் காரணிகள் ஆகும். எஞ்சி நிற்கும் காரணியானது a, b, c ன் ஒன்றுவது படியுள்ள ஓரின வட்டச் சீர்க் கோவையாகும். அத்தகைய காரணியானது $k(a+b+c)$ என்னும் வடிவுறும். அது பற்றி

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) \equiv k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

என்னும் முற்றொருமை யமையும்.

இரு பக்கங்களிலும், a^3b என்னும் உறுப்பின் குணகங்களைச் சமன் உறுத்த, $k=-1$ எனக் கிடைக்கப் பெறுவோம்.

$$\therefore\ a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) \equiv$$
$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

குறிப்பு : $a=0,\ b=1,\ c=2$ என்று பிரதியீடு செய்தும் $k=-1$ எனப்பெறலாம்.

மாதிரி 2

$2s=a+b+c$ ஆனால், $s^3-(s-a)^3-(s-b)^3-(s-c)^3=3\ abc$ என்று காண்பிக்க.

இங்கு $s-a=x$; $s-b=y$; $s-c=z$ எனக்கொள்க.

இவற்றைக் கூட்ட, $3s-(a+b+c)=x+y+z$ ஆம்

அதாவது, $3s-2s=x+y+z$

$\therefore \quad s=x+y+z$

$\therefore \quad s^3-(s-a)^3-(s-b)^3-(s-c)^3=(x+y+z)^3-x^3-y^3-$

இனி, $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ என்னும் கோவையில்

$x=-y$ என்று பிரதியிட,

$(-y+y+z)^3-(-y)^3-y^3-z^3=z^3+y^3-y^3-z^3=0$ ஆம்.

இதுபற்றி $(x+y)$ என்பது ஒரு காரணியென அறிகின்றோம்.

இதைப் போல், $y+z$, $z+x$ என்பனவும் காரணிகளாகப் பொருந்தும். இங்கு $(x+y+x)^3-x^3-y^3-z^3$ என்னும் மூன்று படியுள்ள கோவைக்கு $(x+y)\ (y+z)(z+x)$ என மூன்று படியுள்ளதோர் காரணி கிடைக்கப் பெற்றுள்ளோம்.

இக்கோவைக்கு வேறுமோர் காரணியிருக்கக்கூடுமானால், அது ஓர் **எண்**காரணி யாகத்தான் இருக்கக்கூடும். அது 'k' என்னு மோர் மாறிலி யாகக் கொள்ளப்படுமானால்,

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\equiv k(x+y)(y+z)(z+x)$$

என்பதோர் முற்றொருமை எய்தும். இம்முற்றொருமை, x, y, z பெறும் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தாநிற்கும்.

$x=0$; $y=1$, $z=1$ என்று பிரதியீடுசெய்ய,

$2^3-0-1-1\equiv k\ (1)\ (2)\ (1)$ ஆம்.

அஃதாவது, $8-2=2k$: அல்லது, $k=3$.

$\therefore \quad (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)\ (z+x)$

முன் பிரதியீடுகளாகக் கொண்டவற்றைப் பயன்படுத்த,

$x+y+z=s-a+s-b+s-c=3s-(a+b+c)=3s-2s=s$ ஆம்

$x+y=s-a+s-b=2s-(a+b)=(a+b+c)-(a+b)=c$,,

$y+z=s-b+s-c=2s-(b+c)=(a+b+c)-(b+c)=a$,,

$z+x=s-c+s-a=2s-(c+a)=(a+b+c)-(c+a)=b$,,

$\therefore \quad s^3-(s-a)^3-(s-b)^3-(s-c)^3=3abc$ எனக் காட்டுதல் அமையும்.

மாதிரி 3

காரணிப் படுத்தல் : $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

$f(a)\equiv a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ என்க

$a=-(b+c)$ என்று பிரதியீடுசெய்ய,

$f\ \{-(b+c)\}$

$= (b+c)^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2\ (b+c)^2-2b^2(b+c)$

$=(b+c)^4+(b^2-c^2)^2-2(b+c)^2(b^2+c^2)$

$=(b+c)^4+(b+c)^2(b-c)^2-2(b+c)^2(b^2+c^2)$

$=(b+c)^4+(b+c)^2\ \{(b-c)^2-2b^2-2c^2\}$

$=(b+c)^4+(b+c)^2(-b^2-c^2-2bc)=(b+c)^4-(b+c)^4=($

$\therefore\ (a+b+c)$ என்பது $f(a)$ என்னுங் கோவைக்குக் காரணியாகும்

இனி, $a=b+c$ என்று பிரதியீடு செய்ய, $f\ (a)=0$ ஆம்.

$\therefore\ (b+c-a)$ ஒரு காரணியாகும்.

இவ்வாறே, $(c+a-b)$, $(a+b-c)$க்களும் காரணிகளாகும்.

இப்பொழுது,

$k\ (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$\equiv a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

என்பதோர் முற்றொருமை கிடைக்கும். இதனுள்,

$a=0$, $b=1$, $c=2$ என்று மதிப்பீடு கொடுக்க,

$k\ (3)(3)(1)(-1)=0+1+16-8-0-0$

அதாவது, $-9k=9$ ஆம்

அல்லது, $k=-1$ ஆம்

$\therefore\ a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

$=-(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ ஆம்.

மாதிரி 4

செய்முறையில் பயன்படுத்தும் தத்துவங்களைத் தெளிவாகக் கூறி $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$ஐக் காரணிப் படுத்துக.

கோவையில் $a=-b$ என்று பிரதியிட,

கொடுத்த கோவை $=(-b+b+c)^5-(-b)^5-b^5-c^5=0$

∴ மீதித்தேற்றத்தால், கொடுத்த கோவைக்கு $(a+b)$ என்பதோர் காரணியாகும். கோவையானது வட்டச் சீரமைப்புப் பெற்றிருத்தலால், $(b+c)$, $(c+a)$ என்பனவும் காரணிகளாம்.

இப்பொழுது,

$(a+b)(b+c)(c+a)$ ஆனது a, b, c ல் மூன்று படியில்உள்ளதாகும்.

கொடுத்த கோவை a, b, c ன் ஐந்து படியில் ஓரின வட்டச்சீர்க் கோவையாகையால், எஞ்சிய காரணியானது a, b, c ன் இரண்டு படியில் ஓரின வட்டச்சீர்க் கோவையாக இருக்கவேண்டும்.

அக்காரணியானது

$$k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)$$

என்னும் அமைப்புடையதாதல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad (a+b+c)^5-a^5-b^5-c^2$$

$$\equiv (a+b)(b+c)(c+a)\ \{k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)\}$$

இதன்கண் உள்ள k, l என்னும் மாறிலிகளின் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்க, $a=0$, $b=1$, $c=2$ என்று மதிப்பீடு கொடுக்க,

$210=6(5k+2l)$ எனப்பெறுகின்றோம்.

$a=0$, $b=-1$, $c=2$ என்று இட,

$-30=-2(5k-2l)$ ஆகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்வுகாணுங்கால், $k=5$, $l=5$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad (a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$$

$$=5\ (a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

பயிற்சி 1·2

1. பின் வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக :

(i) $\Sigma a^2 (b-c)$ (ii) $\Sigma ab(a-b)$

(iii) $\Sigma a(b^2-c^2)$ (iv) $\Sigma (a-b)^3$

(v) $\Sigma a^3(b-c)$ (vi) $\Sigma a(b^3-c^3)$

(vii) $\Sigma a(b-c)^3$ (viii) $\Sigma a^4(b-c)$

(ix) $\Sigma ab(a^3-b^3)$ (x) $\Sigma a(b^4-c^4)$

(xi) $\Sigma a^3(b^2-c^2)$ (xii) $\Sigma a^2(b^2-c^3)$

(xiii) $\Sigma a^2b^2(a-b)$ (xiv) $\Sigma(a-b)^5$

2. பின் வருனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $\Sigma a^4(b^2-c^2)$

(ii) $\Sigma a^2(b+c)+2abc$

(iii) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$

(iv) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

(v) $(x+y+z)^3-(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3$

(vi) $8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3$

(vii) $(x+y+z)^4-(x+y)^4-(y+z)^4-(z+x)^4+x^4+y^4+z^4$

(viii) $\Sigma(b^3+c^3)(b-c)$

(ix) $\Sigma(b-c)(b+c-a)^3$

3. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ எனின், x, y, z என்பவற்றுள் இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 0 ஆகுமென்று காட்டுக, ஆகவே

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{1}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3$$

என்று காட்டுக.

குறிப்பு : மேற்கண்ட பலன் 5, 7....ஆகிய எந்த ஒற்றைப்படை அடுக்குக்குறி எண்ணுக்கும், பொதுவாக $(2n+1)$ என்ற அடுக்குக்குறி எண்ணுக்கும் பொருந்தும்.

4. சுருக்குக :

(i) $\Sigma \dfrac{x}{(x-y)(x-z)}$

(ii) $\Sigma \dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}$

(iii) $\Sigma \dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}$

(iv) $\Sigma \dfrac{x^4}{(x-y)(x-z)}$

5. $\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ca}+\dfrac{a-b}{1+ab}=\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$

எனக் காட்டுக.

6. $\Sigma \dfrac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)}=-2$ எனக் காட்டுக.

7. $\Sigma \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b)(a-c)}=4$ எனக் காட்டுக.

8. $x=0, y=1, z=-1$ எனப்பிரதியிட மதிப்பு 1ம்; $x=1, y=0, z=1$ என்று பிரதியிடும்பொழுது மதிப்பு 7ம் பெறும் x, y, zன் இருபடி ஓரினச் சமச் சீர்க்கோவை யொன்றனைக் காண்க.

[விடை : $2(x^2+y^2+z^2)+3(xy+yz+zx)$]

9. x, yன் மூன்று படியுள்ள ஓரினச் சமச்சீர்க்கோவை யொன்று $x=1, y=2$ என்று கொடுக்க மதிப்பு 21ம்; $x=1. y=1$ என்று பிரதியிட மதிப்பு 6 ம் பெறுமாயின், அக்கோவையைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை : $x^3+y^3+2(x^2y+yx^2)$]

10. $(2x-y)$யைக் காரணியாகக்கொண்ட, x, yல் இருபடியுள்ள ஓரினக் கோவையொன்று $x=y=1$ என்று பிரதியிட, மதிப்பு 2 பெறு

கிறது. அக்கோவையில் $x=-1$, $y=1$ என்று பிரதியிட்டால், கோவை மறைவுபடுகிறது. அக்கோவை யாது ?

[விடை : $(2x-y)(x+y)$]

4. மீதித் தேற்றத்தின் பிரயோகத்தால் பெறக்கிடப்பன :

(i) "x ன் n படி விகிதமுழுக்கோவை யொன்று x பெறும் n வேறுபடு மதிப்புக்களுக்கு மறைவுபடுமானால் (vanish), அது n வேறு ஒருபடிக் காரணிகளாகப் பகுபடும்"

(ii) "x ன் n படிக் கோவையானது ஒவ்வொரு அடுக்குடைய x ன் குணகமும் பூஜ்ஜியமானாலன்றி, x பெறும் n க்கு அதிகப்பட்ட மதிப்புக்களுக்கு மறைவு படாது. அப்படியானால், x ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் அக்கோவை பூஜ்ஜியத்திற்குச் சருவசம மாகும்."

5. தேராக்குணகங்களைப் பற்றிய தத்துவம் (Principle of undetermined Coefficients)

"x-ல் ஒரே படியுள்ள இரண்டு கோவைகள் சர்வசமமானால், அவை இரண்டிலும் x-ன் ஒரே அடுக்குள்ள உறுப்புக்களின் குணகங்கள் சம மாகும்."

இந்த உண்மையை உபயோகித்துத் தேராக் குணகங்களின் மதிப்புக்களைக் கண்டுகொள்ளலாம்.

பயிற்சி 1.3

1. $12x+7 \equiv A(2x+3)+B(3x-1)$ ஆனால், A, B க்களைக் கண்டுபிடி.

[விடை : A=3, B=2]

2. $4x^2-5 \equiv A(x-1)^2+B(x-1)+C$ ஆனால், A, B, C க்களைக் கண்டுபிடி.

[விடை : A=4, B=8, C=−1]

3. $4x^2-12x+6$ ஐ, $A(x-1)(x-2)+B(x-2)(x-3)+C(x-3)(x-1)$ என்ற வடிவில் வரைக.

[விடை; A=3, B=−1, C=2]

4. x^3 ஐ, $(x-2)$ ன் சார்பாக அமைக்க.

[விடை : $x^3 \equiv (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 12(x-2) + 8$]

5. $n^3 \equiv A\,n(n+1)(n+2) + Bn(n+1) + Cn + D$ ஆனால், A, B, C, D க்களின் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை $A=1,\ B=-3;\ C=1;\ D=0$]

6. x ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் $x^2 - 4x - 8 + k\,(x^2 - 2x - 5) = a(x-b)^2$ ஆகுமெனின், k, a, b க்களின் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக.

[விடை : $k=-3/2,\ a=-\frac{1}{2},\ b=-1$; அல்லது
$k=-\frac{3}{4},\ a=-\frac{1}{3},\ b=-2$]

7. $x^2 - 6xy + 8y^2 + 6x - 20y + 8$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

[விடை : $(x-2y+4)(x-4y+2)$]

8. p ன் எந்த மதிப்புக்களுக்கு $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + py - 12$ என்னும் கோவை வாஸ்தவ (Real) ஒருபடிக் காரணிகளைப் பெறும் ?

[விடை : $p=10$ அல்லது $-17\frac{1}{2}$]

9. $9x^6 - 6x^5 + 7x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + c$ ஒரு முழுவர்க்கமானால், a, b, c ன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : $a=3,\ b=-2,\ c=1$]

10. $(a-r)x^2 + (b-r)y^2 + (c-r)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ என்பது x, y, z ன் ஒரு விகித முழுக்கோவையின் வர்க்க மாகுமானால்,

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h} = r$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

II. அடுக்குக் குறிகளைப் பற்றிய கொள்கைகள் (Theory of Indices)

1. அடுக்குகள்

p என்பது தன முழு எண்ணுனல், ஒவ்வொன்றும் 'a' க்குச் சமமாகிய p காரணிகளின் பெருக்கற்பலன் a^p என்று குறிக்கப்படும்.

அதாவது. $a \times a \times a \times a \times \ldots p$ காரணிகள் $= a^p$

a^p ஆனது a ன் pஆவது அடுக்கெனப்படும் (power)

p ஆனது a ன் அடுக்குக்குறியெனப்படும் (index)

a ஆனது அடுக்கின் 'அடி' (base) எனப்படும்.

2. தன முழு எண் அடுக்குக் குறிகளைப் பற்றிய விதிகள் (The Index Laws for positive integers)

a யும் b யும் பூஜ்யம் நீங்கலாகிய யாதொரு நிஜ எண்களாகியும். m ம், n ம் யாதொரு தனி முழு எண் களாகியும் இருக்குமாஞல்,

விதி I

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

விதி II

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ அல்லது } \frac{1}{a^{n-m}}, \quad m \gtrless n \text{ என்பதற்கேற்ப}$$

விதி III

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

விதி IV

$$(ab)^m = a^m b^m$$

கிளை விதி; $(abcd\ldots)^m = a^m b^m c^m d^m \ldots\ldots$

விதி V

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

நிருபணங்கள் :

விதி I

$a^m \times a^n = (a \times a \times a \ldots$ m காரணிகள் வரை)

$\times (a \times a \times a \ldots$ n காரணிகள் வரை)

$= a \times a \times a \times \ldots\ldots$ $(m+n)$ காரணிகள் வரை

$= a^{m+n}$

குறிப்பு : இப்பலனை மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட காரணிகளுக்கும் விஸ்தரிக்கலாம். ஆகவே, $m, n, p \ldots$ தனமுழு எண்களானல்,

$a^m \times a^n \times a^p \ldots = a^{m+n+p\ldots}$ எனக் கிடைக்கும்.

விதி II

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots m \text{ காரணிகள்வரை}}{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots n \text{ காரணிகள்வரை}}$$

$m > n$ ஆனல், பகுதியிலுள்ள எல்லாக் காரணிகளும் தொகுதியிலுள்ள n காரணிகளைப் போக்கித், தொகுதியில் $(m-n)$ காரணிகளை மட்டும் நிறுத்தும்.

$\therefore \dfrac{a^m}{a^n} = a \times a \times a \times \ldots (m-n)$ காரணிகள் வரை

$= a^{m-n}$

$m < n$ ஆனல், தொகுதியிலுள்ள m காரணிகளனைத்தும் பகுதியிலுள்ள m காரணிகளைப் போக்கியெஞ்சிய $(n-m)$ காரணிகளை மட்டும் பகுதியில் நிறுத்தும்.

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots (n-m) \text{ காரணிகள் வரை}}$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}$$

விதி III

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \ldots\ldots\ldots n \text{ காரணிகள்வரை}$$
$$= a^{m+m+m+\ldots\ldots n} \text{ உறுப்புகளுக்கு}$$
$$= a^{mn}$$

விதி IV

$$(ab)^m = (ab) \times (ab) \times \ldots\ldots\ldots m \text{ காரணிகள்வரை}$$
$$= (a \times a \times \ldots\ldots m \text{ காரணிகள்வரை}) \times$$
$$(b \times b \times b \times \ldots\ldots m \text{ காரணிகள்வரை})$$
$$= a^m b^m$$

விதி V

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots\ldots m \text{ காரணிகள்வரை}$$
$$= \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots m \text{ காரணிவரை}}{b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots m \text{ காரணிவரை}}$$
$$= \frac{a^m}{b^m}$$

3. பின்ன, பூஜ்ய, ருண அடுக்குக் குறிகள்:

மேற்கண்ட விதிகளைப் பின்ன, பூஜ்ய, ருண அடுக்குக் குறிகளுக்கும் விஸ்தரிக்கலாம்.

ஆனால், நாம் அதைச் செய்யுமுன் பின்ன, பூஜ்ய, ருண அடுக்குக் குறிகளின் பொருளை அறிதல் வேண்டும்.

p ஆனது ஒருதன முழு எண் அல்லாதவிடத்து, பிரிவு 1ல் கொடுத்த உரைவிளக்கம் அர்த்தமற்றதாகும்.

ஆயினும், அடிப்படை அடுக்குக்குறி விதியாகிய $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்பது தன முழு எண்களுக்கே நிரூபிக்கப்பட்டாலும், அது அடுக்குக் குறிகளின் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் உண்மையாகுமெனக் கருதிக் கொண்டு, p ன் பின்ன, பூஜ்ய, ருண மதிப்புக்களுக்கும் விளக்கத்தை வருவிக்கலாம்.

(i) பின்ன அடுக்குக் குறியின் அர்த்தம் :

$p=\frac{m}{n}$ என்று கொள்க. [m, n தன முழு எண்கள்]

$\therefore \quad (a^{m/n})^{n}=(a^{m/n})\,(a^{m/n})\,(a^{m/n})\ldots\ldots n$ காரணிகள் வரை

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots\ldots n \text{ உறுப்புக்கள் வரை}}$$

$$=a^{n\times\frac{m}{n}}=a^{m}$$

$$\therefore \quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

அதாவது, m, n தன முழு எண்கள் ஆனால், $a^{\frac{m}{n}}$ என்பது a^{m}ன் n வது மூலமாகும்.

கிளை : $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

(ii) பூஜ்ய அடுக்குக்குறியின் அர்த்தம் ;

$$a^{m}\times a^{0}=a^{m+0}=a^{m}$$

a பூஜ்யமன்றாயின், ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் a^{m} ஆல் வகுக்க.

$$\frac{a^{m}\times a^{0}}{a^{m}}=\frac{a^{m}}{a^{m}}$$

அதாவது, $a^{0}=1 (a\neq 0)$ [குறிப்பு 0^{0} என்பது வரையறுக்கப் படாத நிலைமையது ஆம்]

(iii) ருண அடுக்குக்குறியின் அர்த்தம்:

a என்பது பூஜ்யம் தவிர ஏதேனுமொரு எண்ணாயின்,

$$a^{-m}\times a^{m}=a^{-m+m}=a^{0}=1$$

$\therefore \quad a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}$; இதனோடு $a^{m}=\frac{1}{a^{-m}}$ ஆம்.

$\therefore \quad a^{-m}=\frac{1}{a^{m}} (a\neq 0,\ m$ ஏதேனுமொரு விகித முழு எண்)

குறிப்பு : இவ்விளக்கத்திற்குப்பின், இரண்டாம் விதியில் கண்ட இரண்டு வகைகளுக்கும் பேதங்காட்ட வேண்டுவதில்லை

$$\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}$$

4. மறுதலையாக, மேல் 3ம் பிரிவிலுள்ள மூன்று பலன்களை வரையறை யிலக்கணங்களாகக்கொண்டு, பின்ன, பூஜ்ஜிய, ருண அடுக்குக் குறிகளுக்கு இப்பொழுது கொடுத்த அர்த்தங்கள் உரித்தானால், அடுக்குக் குறிகளின் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கும் ஏற்புடையனவாம் என்றும், இந்த அர்த்தங்கள் தனமுழு எண்களுக்குரிய அடுக்குக் குறி விதிகளோடு ஒவ்வாதவை யல்ல என்றும் நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.

விதி I

5. m, n எண்களின் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும் $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்று நிரூபித்தல் :

வகை I m, n என்பன தனமுழு எண்கள் ஆகுக.
இவ்விதி ஏற்கனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

வகை II m, n என்பன முறையே p/q, r/s என்பவற்றுக்குச் சமமான தன பின்னங்களாகுக. இங்கு p, q, r, s என்பன தன முழு எண்களாகும்.

அப்பொழுது, $a^m \times a^n = a^{p/q} \times a^{r/s} = z$ என்று கொள்க.

$$\therefore \quad z^{qs} = (a^{p/q} \times a^{r/s})^{qs} = (a^{p/q})^{qs} \times (a^{r/s})^{qs}$$

[IV-ம் விதியின்படி, qs தன முழு எண்ணாதலின்)

$$= \left[(a^{p/q})^q \right]^s \times \left[(a^{r/s})^s \right]^q$$

[q, s என்பன தன முழு எண்ணாதலின்]

$$= \left[\left(\sqrt[q]{a^p} \right)^q \right]^s \times \left[\left(\sqrt[s]{a^r} \right) \right]^q$$

[பின்ன அடுக்குக்குறியின் இலக்கணம் காரணமாக]

வகை 3. அடுக்குக் குறிகளில் ஒன்று n, ருண எண்ணாகவும் மற்றொன்று தன எண்ணாகவும் ஆகுக.

$n=-q$ என்றெழுதுக. இங்கு q ஒருதன விகிதமுறு எண்ணுகும். $m-q$ தன ராசியானுல், அப்பொழுது,

$$a^{m-q}\times a^{q}=a^{m} \qquad \text{(i)}$$

அதனேடு, $$a^{m}\times a^{-q}\times a^{q}=a^{m} \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii) இவற்றிலிருந்து, $a^{m}\times a^{-q}=a^{m-q}$ (iii)

அஃதாவது, $$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

$m-q$ ருண ராசியானுல்,

$$\frac{1}{a^{-m}}\times\frac{1}{a^{q}}=\frac{1}{a^{q}\cdot a^{-m}}=\frac{1}{a^{q-m}} \qquad \text{(iii) லிருந்து)}$$

$\therefore \quad a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$

[ருண அடுக்கின் வரையறையிலக்கணத்தால்]

$\therefore \quad a^{m}\times a^{-q}=a^{m-q}$

வகை 4. இரண்டு அடுக்குக் குறிகளும் ருண ராசிகள் ஆகுக.

m, n முறையே $-p$, $-q$ என்று கொள்க.

இங்கு p, q தன விகிதமுறு எண்களாகும்.

அப்பொழுது, $a^{m}\times a^{n}=a^{-p}\times a^{-q}=\frac{1}{a^{p}}\times\frac{1}{a^{q}}$ (ருண அடுக்கு எண்ணின் வரையறை)

$$=\frac{1}{a^{p+q}}$$
$$=a^{-p-q}$$
$$=a^{m+n}$$

ஆகவே, m, n இவைகளின் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும் $a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$ ஆகும்.

விதி II

முதல் விதியிலிருந்த m, n களின் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக் களுக்கும்

$a^{n}\times a^{m-n}=a^{m}$ எனப் பெறுகின்றேம்

$$\therefore \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$\therefore$ m, n களின் எல்லா வித விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கும்,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

குறிப்பு : இவ்விதி m, n, p, q...முதலாகிய எல்லா விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும் பின்வருமாறு விஸ்தரிக்கப் படலாம்

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q \; \ldots\ldots = a^{m+n+p+q+\cdots}$$

விதி III

m, n களின் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும், $(a^m)^n = a^{mn}$ என நிரூபித்தல் :

வகை 1 n தன முழு எண் ஆகுக.

அப்பொழுது, m ஆனது யாதானுமோர் விகிதமுறு எண்ணையினும்,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \; n \text{ காரணிகள்வரை}$$
$$= a^{m+m+m+\ldots \; n \text{ உறுப்புகளுக்கு}}$$
$$= a^{mn}$$

வகை 2. p, q என்பன தன முழு எண்களாயிருக்க,

$n = \frac{p}{q}$ என்னும் தனராசிப் பின்னமாகுக.

அப்பொழுது m, யாதானுமோர் விகிதமுறு எண்ணையிருந்தாலும்,

$$(a^m)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^m)^p}$$

$$= \sqrt[q]{a^{mp}} \quad (p, \text{ தனமுழு எண்ணுகையால்})$$

$$= a^{\frac{mp}{q}}$$

$$= a^{m\frac{p}{q}}$$

$$= a^{mn}$$

வகை 3. இறுதியாக, p ஆனது தன முழு எண் அல்லது பின்னமாகிய விடத்து, n ருண ராசியாகவும், $-p$ க்குச் சமானமாக வும் உள்ளதாகக் கொள்க.

அப்பொழுது m யாதொரு விகிதமுறு எண்ணுயினும்,

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}$$

$$=a^m\times a^{\ p}=a^{mn}$$

இங்ஙனம், m, n களின் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும் $(a^m)^n=(a^m)^n=(a^n)^m$ ஆகுமென்று அறியப்படும்.

விதி IV

m ன் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும், $(ab)^m=a^mb^m$ என்று நிரூபித்தல்.

வகை 1: m ஒருதன முழு எண்ணுனல் இவ்விதி எளிதாக நிரூபிக்கப்படும்.

வகை 2; p, q என்பன தன முழு எண்களாகிய விடத்து, $m=\frac{p}{q}$ என்னும் தனராசிப் பின்னமாகுக.

$$(ab)^m=(ab)^{p/q}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^q} \qquad \text{(i)}$$

மேலும், q ஒரு தன முழு எண் ஆகையால்,

$$(a^m\times b^m)^q=a^{mq}\times b^{mq}=a^pb^p$$

$$\therefore \qquad a^m\times b^m=\sqrt[q]{a^pb^p} \qquad \text{(ii)}$$

$$\therefore \qquad (ab)^m=a^mb^m$$ (i), (ii) என்பவற்றிலிருந்து

வகை 3: p ஒரு தன முழு எண் அல்லது பின்னமாகிய விடத்து m ருண ராசியாகவும், $-p$க்குச் சமமாகவும் இருக்கட்டும்.

$$(ab)^m=(ab)^{-p}=\frac{1}{(ab)^p}=\frac{1}{a^pb^p}$$

[(1), (2) வகைகளால்]

$$=a^{-p}b^{-p}=a^mb^m$$

ஆகவே, m ன் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும் $(ab)^m = a^m b^m$ ஆகும்.

விதி V

m ன் எல்லாவித விகிமுறு மதிப்புக்களுக்கும்

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^m = \left(\frac{a}{b} \times b\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \times b^m \qquad \text{(விதி IV ஆல்]}$$

$$\therefore \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$\therefore$ m ன் எல்லாவித விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும்,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ ஆகும்.}$$

6. விளக்க மாதிரிகள் :

மாதிரி 1 :

$x = y^z;\ y = z^x;\ z = x^y$ ஆகுமாயின், $xyz = 1$ என்று நிரூபிக்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

$$\begin{aligned} x^{xyz} &= (x^y)^{yx} \\ &= (z)^{zx} \\ &= (z^x)^z \\ &= y^z \\ &= x \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad x^{xyz} = x = x^1$$

இரு பக்கங்களிலும், xன் அடுக்கெண்களைச் சமனுறுத்த, $xyz = 1$ என்று கிடைக்கப் பெறுகின்றோம்.

மாதிரி 2 :

$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$ ஆனால், $(x+y+z)^3 = 27xyz$ என்று நிரூபிக்க;

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

விடை : $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ ஆதலின்,

$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$ ஆகும்.

(i) 1 ன் இரு பக்கங்களையும் கனப்படுத்த

$$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z \text{ ஆம்}$$

அஃதாவது, $x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(-z^{\frac{1}{3}})=-z$ ஆம் (i) ஐக் காண்க

,, $x+y-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}=-z$,,

,, $x+y+z=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$

மீண்டும் இரு பக்கங்களையும் கனப்படுத்த

$$(x+y+z)^3=27\,xyz \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 3 :

சுருக்குக.

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$$

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}=\frac{1\times x^{-a}}{x^{-a}(1+x^{a-b}+x^{a-c})}$$

[பகுதி, விகுதிகளை x^{-a} ஆல் பெருக்க]

$$=\frac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$$

இவ்வாறே இரண்டாம் உறுப்பின் பகுதி விகுதிகளை x^{-b}ஆல் பெருக்க,

$$\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}=\frac{x^{-b}}{x^{-b}(1+x^{b-c}+x^{b-a})}=\frac{x^{-b}}{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}$$

ஆகும்.

இவ்வாறே $\dfrac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}=\dfrac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}$

ஆதல் பெறப்படும்,

இறுதியாக இவற்றின் கூட்டுப் பலன்

$$=\frac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}+\frac{x^{-b}}{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}+\frac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}$$

$$=\frac{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$$

$=1$ எனவரும்

∴ கொடுத்த கோவையின் சுருக்கல் பலன் 1ஆம்.

மாதிரி 4;

தீர்வு காண்க :

(i) $5^{x+y}=25^{y-x}$; (ii) $2^{3x+y}=8^{y-1}$

$5^{x+y}=25^{y-x}=(5^2)^{y-x}=5^{2y-2x}$ (i)

$2^{3x+y}=8^{y-1}=(2^3)^{y-1}=2^{3y-3}$ (ii)

ஆகவே, $x+y=2y-2x$ (i) ஆல் ∴ $3x-y=0$ (iii)

$3x+y=3y-3$ (ii) ஆல் ∴ $3x-2y=-3$ (iv)

(iii), (iv)ஐ விடுவிக்க $x-1$, $y=3$ எனவரும்

பயிற்சி 2·1

1. சுருக்குக ;

(i) $2^3\times4^3\times8^{\frac{2}{3}}\times16^{\frac{1}{2}}$

[விடை : 2^{13}]

(ii) $\left(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{5}}\right)^{15}\times\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{6}\div\left(a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

[விடை : $a^{18}b^{15}$]

(iii) $(ab)^5a^{\frac{3}{2}}\div\sqrt[3]{-a^8b^8}$

[விடை: $a^{3\frac{1}{8}}, b^{\frac{7}{3}}$]

(iv) $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\sqrt{x^4y^6}\times\sqrt[n]{x^{8n}y^{+3n}}$

[விடை ; x^8y^{-3}]

(v) $(a^3)^2 \div (b^2)^3 \times (ab)^3 \div b^{2^3} \times a^{3^2} \div (a^2 \times a^4)$

[விடை : a^{12}/b^{11}]

2. சுருக்குக :

(i) $\dfrac{(3^{m+1})^n}{(3^{n+1})^m} \cdot \dfrac{3^{2m}}{3^{2n}} \; 3^{2(m-n)}$

[விடை : $3^{4(m-n)}$]

(ii) $\dfrac{4^{2^3} - (4^3)^2}{3 \times 2^2 + 3 \times 4^0} \times \dfrac{4^{2.93}}{4^{5.93}}$

[விடை : 64]

(iii) $\dfrac{6^{m+1} \cdot 10^{m-n} \cdot 15^{m+n-2} \cdot 2^n}{4^m \cdot 3^{2m+n} \cdot 25^{m-1}}$

[விடை : $\frac{2}{3}$]

(iv) $8^{-\frac{1}{3}} + 27^{-\frac{1}{3}}$

[விடை : $\frac{5}{6}$]

3. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$, ஆனால், $2x^3 + 6x = 3$ என நிரூபி.

4. சுருக்குக :

(i) $(x^{a-b})^c \; (x^{b-c})^a \; (x^{c-a})^b$

[விடை : 1]

(ii) $\dfrac{x^{b+c}}{x^a} \cdot \dfrac{x^{c+a}}{x^b} \cdot \dfrac{x^{a+b}}{x^c}$

[விடை : 1]

(iii) $(x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a}$

[விடை : 1]

(vi) $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \cdot \left(\dfrac{x^n}{x^p}\right)^{n+p} \cdot \left(\dfrac{x^p}{x^m}\right)^{p+m}$

[விடை : 1]

(v) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

[விடை : 1]

(vi) $(x^{b-c})^{\frac{1}{bc}} \cdot (x^{c-a})^{\frac{1}{ca}} \cdot (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}}$

[விடை : 1]

(vii) $\sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \cdot \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}} \cdot \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}}$

[விடை ; 1]

(viii) $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \cdot \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \cdot \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

[விடை : 1]

(ix) $\left(x^{\frac{bc}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}} \cdot \left(x^{\frac{ca}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \cdot \left(x^{\frac{ab}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}$

[விடை : $\frac{1}{x}$]

(x) $\frac{1}{1+a^{m-n}} + \frac{1}{1+a^{n-m}}$

[விடை : 1]

5. சுருக்குக :

$$\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

[விடை : $2x^2$]

6. நிரூபிக்க :

(i) $\frac{(1-a^{-1})(1-b^{-1})}{1+a^{-1}b^{-1}} + \frac{a+b-a^{-1}-b^{-1}}{ab-a^{-1}b^{-1}} = 1$

(ii) $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}} + \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}} = 1$

7. $\sqrt[a]{x^{b-c}}\ \sqrt[b]{x^{c-a}}\ \sqrt[c]{x^{a-b}}=1,\ x\neq 1$ ஆனால், $a,\ b,\ c$ என்ற வற்றுள் ஏதேனும் இரண்டாவது பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமமாகுமென்று நிரூபி.

8. (i) 5^{200} (ii) 3^{100} (iii) $4^{1.50}$ இவை ஒவ்வொன்றை யும் ஒரு எண்ணின் 50வது அடுக்காக எழுதுக.

5^{200} பெரியதா? அல்லது $3^{300}\times 4^{1.50}$ பெரியதா? ஏன்?

9. $xy^{p-1}=a,\quad xy^{q-1}=b,\ xy^{r-1}=c,$ ஆனால்
$a^{q-r}\,.\,b^{r-p}\,.\,c^{p-q}=1$ என்று காட்டுக.

10. $a^x=bc,\quad b^y=ca,\quad c^z=ab$ எனின்,

(i) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1$ என்று நிரூபி

(ii) இது பற்றியேனும் அல்லது வேறு வகையினாலேனும்
$xyz=x+y+z+2$ என்று நிரூபி

11. (i) $x=a^m,\ y=x^n,\ x^ny^m=a^{\frac{2}{p}}$ ஆனால், $mnp=1$ என்று நிரூபி.

(ii) $a^{m^n}=(a^m)^n$ ஆனால், $m=n^{\frac{1}{n-1}}$ என்று காட்டுக.

(iii) $x^y=y^x$ ஆனால், $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$ என்று நிரூபி.

(iv) $a^x=b^y=ab$ ஆனால், $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=$ என்று காட்டுக.

(v) $a^x=b^y=c^z;\ b^2=ac$ ம் ஆனால், $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$ என்று நிரூபி.

(vi) $a=p^x,\quad b=p^y;\quad a^yb^x=p^{2(x+y)}$ எனில்,
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ என்று காட்டுக.

12. (i) $y=x+\sqrt{x^2+1}$ ஆனால், $x=\frac{1}{2}(y-y^{-1})$ என்று நிரூபி.

(ii) $a=x-\sqrt{x^2-1}$ ஆனால், $2x=a+\frac{1}{a}$ என்று காட்டுக.

13. தீர்வு காண்க :

(i) $2^{3y-1}=8^{x+y};\quad 3^{x+3y}=9^{2x-4}$

[விடை $x=-\frac{1}{3}, y=-3$]

(ii) $a^b=b^a;\quad a=2b$

[விடை : $a=4,\ b=2$]

(iii) $64^x=\frac{1}{256^y}=2\sqrt{2}$

[விடை $x=\frac{1}{4};\ y=-\frac{3}{16}$]

15. வர்க்க மூலங் காண்க ;

(i) $4^m-2^{m+1}\ 3^n+9^n$

[விடை : 2^m-3^n]

(ii) $25^p+2^{q+1}\ 5^p+4^q$

[விடை : 5^p+2^q]

14. $abc=1$ ஆனால்,

$(1+a+b^{-1})^{-1}+(1+b+c^{-1})^{-1}+(1+c+a^{-1})^{-1}=1$ என்று காட்டுக.

7. விகிதமுறு மூலங்கள் (surds)

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் சரியாக நிர்ணயிக்க முடியாத மூலம், விகிதமுறு மூலம் எனப்படும்.

$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{4}$ ஆகியவை அத்தகு விகிதமுறு மூலங்களுக்கு உதாரணங்களாம்,

குறிப்பு ;

$\sqrt{2}=1\cdot414\ldots$நாம் $\sqrt{2}$ஐ எத்தனை தசமஸ்தான சுத்தமாக வேண்டுமானாலும் கண்டுகொள்ளலாம். சமீபகாலம் வரை இம்மாதிரி எண்களை அர்த்தமற்ற எண்கள் (absurd numbers) என்று குறிப்பிட்டார்கள். இதுவே நாளடைவில் 'surds' என்னும் சொல்லாக மாறிற்று. ஆனால் இப்பொழுது $\sqrt{2}$ போன்ற எண்கள் இதர எண்களைப் போன்றனவே எனத் தெரிந்தும் பெயரில் மாற்றம் செய்யவில்லை. [மனிதனின் கணித வளர்ச்சியில் அக்காலத்திலே அடைந்த நிலையைக் குறிப்பிட அச்சொல் பயன்படுவதால், அப்பெயர் மாற்றப்படாமல் வழக்காற்றில் நிற்பதாயிற்று எனக்கொள்க!]

8. விகிதமுரு மூலங்களை விகிதமுறுத்தல்

விகிதமுரு மூலங்களைப் பகுதியில் இடம் பெறாமல் தவிர்த்து எண் கணித முறையில் மதிப்பைக் காணுதற்கு மேற்கொள்ளும் செய்முறையுழைப்பைக் குறைத்து, விகிதப்படுத்தும் முறைக்கு விகிதமுரு மூலங்களின் **விகிதப்பாடு** (Rationalisation) எனப்படும்.

விளக்கமாதிரி 1 :

விகிதமுறுத்துக $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

விளக்க மாதிரி 2 ;

விகிதமுறுத்துக $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

செய்முறை :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

குறிப்பு :

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ம் $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ம் ஒன்றற்கொன்று பரஸ்பர அல்லது துணை (Conjugate) விகிதமுரு மூலங்க ளெனப்படும்.

நோக்குக :

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$. இஃது விகிதமுறு எண்ணாகும்.

9. விளக்க மாதிரிகள்

விகிதமுறுத்துக : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

செய்முறை :

இங்கு பகுதியை விகிதமுறுத்தற்கு, விகிதமுறு மூலத் துணைக்கோவையைப் பெருக்கியாக நாடிக் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ க்கு ஏற்புடைய துணைக் கோவைகள் $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$யும், $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ யும் ஆம். இவற்றுள் $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ யைப் பெருக்கியாகக் கொண்டால்,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2+2\sqrt{2}-3}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

மீண்டும் பகுதி விகுதிகளை $\sqrt{2}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2\times 2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{ஆம்.}$$

வேறுவழி :

$1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ஐப் பெருக்கியாகக்கொண்டு செய்து பார்.

பயிற்சி 2·2

1. சுருக்குக ;

(i) $\frac{2}{3-\sqrt{7}}-\frac{4}{3+\sqrt{5}}$

[விடை ; $\sqrt{7}+\sqrt{5}$]

(ii) $\frac{(15+5\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{5-\sqrt{5}}$

[விடை ; 5]

(iii) $\frac{x\sqrt{x}+3x-4\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}$

[விடை ; $x-\sqrt{x}$]

2. $x=\sqrt{2}+1$ ஆனால், x^2+x^{-2}ன் மதிப்பைக் காண்க

[விடை ; 6]

3. $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ஆனால், x^2+x^{-2} ன் மதிப்பைக் காண்க

[விடை ; 10]

4. $x=\frac{1}{2}(5-\sqrt{21})$ ஆனால்,

$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$ என்று காட்டுக.

5. $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ஆனால்,

$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(+x^2\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ன் மதிப்பைக் கண்டு பிடி.

[விடை : 59]

6. சுருக்குக ;

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

[விடை : 3]

7. பகுதியை விகிதமுறுத்துக :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$

(iii) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$

8. $x=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ ஆனால், $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ ஒரு முழு எண்ணாகுமென்று காட்டுக.

9. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ என்று காட்டுக.

10. தீர்வு காண்க :

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{x}$$

10. தேற்றம்

$\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ விகிதமுரு மூலங்களாகவும், a, c விகிதமுறு எண்களாகவும் ஆகுமிடத்து, $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ஆனால், அப்பொழுது $a=c$, $b=d$ ஆகும்.

$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ஆதலின்,

இடம் பெயர்க்கையால், $a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d}$ எனப் பெறுகின்றோம்.

இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கப்படுத்தலால்

$$(a-c)^2+2(a-c)\sqrt{b}+b=d \text{ ஆகும்}$$

$$\therefore \quad 2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a-c)^2$$

இப்பொழுது, $\sqrt{b}$ விகிதமுரு எண்ணாகும் ;

$(a-c)\neq 0$ ஆனால், ஒரு விகிதமுருக்கோவை ஒரு விகிதமுறு கோவைக்குச் சமமாகப் பெறுகின்றோம். இது அர்த்தமற்றதாகும்.

$\therefore$ $a-c$ பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமமாதல் வேண்டும்.

அஃதாவது $a=c$.

ஆகவே, $b=d$.

குறிப்பு: $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ஆனால்,

அப்பொழுது $a-\sqrt{b}=c-\sqrt{d}$ ஆகும்.

11. விளக்க மாதிரிகள் :

மாதிரி 1 : $70-15\sqrt{3}$ ன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க :

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

குறிப்பு : $\sqrt{70-15\sqrt{3}}$ தனராசி என்று கொள்ளவும்.

$$\sqrt{7-15\sqrt{30}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$ எனக் கொள்க.

இருபக்கங்களிலும் வர்க்கங்காண,

$$70-15\sqrt{3}=a+b-2\sqrt{ab}$$ ஆகும்.

இனி, முழுஎண் உறுப்பையும், விகிதமுரு மூலவுறுப்பையும், தனித்தனியெ சமனுறுத்த,

$$a+b=70 \qquad \text{(i)}$$

$$2\sqrt{ab}=15\sqrt{3} \text{ ஆகும்} \qquad \text{(ii)}$$

இவற்றைக்கொண்டு, $a+b=70$, $4ab=675$ என்றறியலாம்.

இனி, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$$=70^2-675=4900-675=4225$$

$\therefore$ $a-b=65$ (iii)

(i), (iii) சமன்பாடுகளை விடுவிக்குங்கால், $a=\dfrac{135}{2}$; $b=\dfrac{5}{2}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \sqrt{70-15\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{135}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}$$

மாதிரி 2 :

காட்டுக : $\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\dfrac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0$

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

மாதிரி 1ல் காட்டிய செய்முறையைப் பின்பற்றி

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$$ எனப் பெறலாம்.

இதேபோல், $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$,,

,, $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,,

∴ கொடுத்த கோவை

$$=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \text{ ஆம்}$$

இனி, ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் பகுதியில் உள்ள விகிதமுறா மூலத்திற்கு ஏற்ற துணை விகிதமுறா மூலத்தைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பகுதியையும் விகிதமுறுத்த. அப்பொழுது கொடுத்த கோவையானது

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$

$$-\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})-(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$=0$ என்று மெய்ப்பிக்கப்பட்டதாகும்.

மாதிரி 3: $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$ன் வர்க்கமூலங் காண்க:

$\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ஆகுக.

இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கஞ் செய்ய

$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$ ஆகும். இவற்றுள்,

விகிதமுறும் பாகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$x+y+z=10 \quad \text{(i)}$$

விகிதமுறாப் பாகங்களைச் சமன்படுத்தப் பின்வருவன பெறப்படும்.

$2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$ அல்லது $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$

$2\sqrt{yz}=2\sqrt{10}$,, $\sqrt{yz}=\sqrt{10}$

$2\sqrt{zx}=2\sqrt{15}$,, $\sqrt{zx}=\sqrt{15}$

இவற்றை வர்க்கங் காண, $xy=6$, $yz=10$, $zx=15$ ஆம்

இனி, $\dfrac{xy\times yz}{zx}=\dfrac{6\times 10}{4}$

அதாவது $y^2=4$ $\therefore$ $y=2$ ஆம். இதையொட்டி $x=3$; $z=5$ இதைக்கொண்டு $x+y+z=3+2+5=10$ ஆம். ஆகவே, (1)ல் காட்டிய சமன்பாடு சரிபட்டு நிற்கக் காண்கிறோம்,

(இது நமது விடையை சரிபார்க்கப் பயன்படுகிறது.)

$\therefore$ தேவையான வர்க்க மூலம் $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ஆம்

பயிற்சி 2·3

1. வர்க்கமூலங் காண்க :

(i) $5-\sqrt{24}$ [விடை : $\sqrt{3}-\sqrt{2}$]

(ii) $134+\sqrt{6292}$ [விடை : $11+\sqrt{13}$]

(iii) $89+28\sqrt{10}$ [விடை : $7+2\sqrt{10}$]

(iv) $181-12\sqrt{5}$ [விடை : $6\sqrt{5}-1$]

(v) $14-6\sqrt{5}$ [விடை : $3-\sqrt{5}$]

2. சுருக்குக :

$$\sqrt{\{4+\sqrt{5}+\sqrt{(17-4\sqrt{15})}\}}$$

[விடை : $1+\sqrt{3}$]

3. $\sqrt{[-\sqrt{3}+\sqrt{\{\ +\sqrt{5}+\sqrt{17-4\sqrt{15}}\}}\ ]}=1$

என நிரூபிக்க.

4. $$\frac{1}{\sqrt{12-2\sqrt{35}}}-\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}-\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}=0$$

எனக் காண்க.

5. காண்பிக்க ;

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0$$

6. சுருக்குக :

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{89-28\sqrt{10}}}$$

[விடை : $\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{3}$]

(7 முதல் 12வரை 44ஆம் பக்கம் பார்க்க)

12. நிஜ (ராசி) எண்கள் :

தன அல்லது ருண ராசிகளாகிய முழு எண்களும் பின்னங்களும் விகித எண்கள் என வழங்கும்.

உதாரணம் : $-5, 2, \frac{1}{7}, -\frac{3}{4}$ முதலாயின.

இதனால், விகித எண் என்றால், $\frac{a}{b}$ என்னும் வடிவத்தில் அமைத்துக் காட்டுதற்கு ஏற்புடைத்தாகும் ஓர் எண்ணுகுமெனக் காண்கின்றோம். ($b=1$ ஆனால், ஒரு முழுஎண் கிடைக்கப்பெறும்)

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}$ என்னும் வடிவுடைய எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனப்படும். இவற்றின் தோராய மதிப்புக்கள் அறிதற்கு அமையுமேனும், இவை $\frac{a}{b}$ என்னும் வடிவத்தில் குறித்து நிறுத்தற்கு ஆகா.

விகித, விகிதமுறு எண்கள் சேர்ந்து நிஜ எண்கள் என வழங்கும்.

கற்பனை எண்கள் : கலப்பு எண்கள் :

இனி, $\sqrt{-14}$ என்னும் வடிவிலமைந்த எண்ணைப் பற்றிக் கருதுவோம்.

இராசிக்குறி விதியிலிருந்து, ஒரு ருண இராசியானது தனக்கு நிஜமான வர்க்கமூலத்தைப் பெற்று நில்லாதென்பது வெளிப்படை ஆகும்.

இத்தகைய எண்களைக் கையாளுதற்கு நாம் ஒரு புதிய எண் சமுதாயத்தை உண்டாக்குகின்றோம். இவ்வகை எண்கள் கற்பனை அல்லது சிக்கல் (கலப்பு) எண்கள் எனப்படும்,

நாம் $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2\,i$ என்றெழுதுகின்றோம்.

இங்கு $\sqrt{-1}=i$ என்னுனது எண் குறிப்பைப் புகுத்துகின்றோம்.

i என்னும் எண் இயற்கணித விதிகளுக்கெல்லாம் இணங்கி நிற்கும்.

ஆகவே, $2+3\,i$ என்பது ஒரு கலப்பு எண் ராசி ஆகும்.

குறிப்பு :

$$\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$$
$$=\sqrt{ab}\times(\sqrt{-1})^2=\sqrt{ab}(-1)=-\sqrt{ab}.$$

எச்சரிக்கை : $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\neq ab$

13. மாறியின் மதிப்பெல்லை : (Limit of a variable)

x என்பதோர் மாறியானது தொடர்ச்சியாக 1·9 ; 1·99 ; 1·999... என்பன போலவோ அல்லது 2·1 ; 2·01 ; 2·001 என்பனபோலவோ மதிப்பெய்துமானல், அதன் மதிப்பு 2 என்னும் மாறிலிக்கு நெருங்கிச் செல்லுவதாகக் கருதி நிற்போம். ஆகவே, இதனை $x\to 2$ என்று குறியிட்டாளுவோம். 2ஐ xன் எல்லை மதிப்பாகக் கூறுவோம். இத்தகைய நிலைமையில் $(x-2)$ன் எண்மதிப்பு இறுதியாக நாம் விரும்பிய அளவுக்கு மிகச்சிறியதாகி விடும்.

14. அனந்த நிலைக்கு மதிப்பின்போக்கு (Tending to infinity) :

x என்னும் மாறியின் மதிப்பு முடிவுநிலைபெருமல் பெருக்கிக் கொண்டே செல்லுமானல், அப்பொழுது x ஆனது அனந்த முறுவதாகக் கூறுவோம். இக்கருத்தினை $x\to\infty$ என்று குறியிட்டு எழுதிக்கொள்ளுவோம். (அனந்த நிலை ∞ என்னும் குறியால் புலப்படுத்தப்படும்)

x என்னும் மாறியானது வரவரப் பெருகிக்கொண்டே போகும் ருணராசி மதிப்புக்களைத் தொடர்ச்சியாகப் பெற்று நிற்குமானல், x ஆனது ருண அநந்த மதிப்பைச் சாருவதாகக் கருதிக்கொண்டு, அந்நிலைமையினை $x\to-\infty$ என்று குறியிட்டுக் காட்டுவோம்.

அந்தமில் அல்லது அனந்த எண்மான (∞)த்தைப் பற்றிய குறிப்பு :

$x\to\infty$ என்ற அளவிலேயே அனந்தம் (∞) என்பது 10^{100} என்பதனை யொப்ப நிர்ணயப்படுவதொரு பேரெண்ணெனக் கருதுதல் ஏற்காது. x ஆனது அனந்தத்தைச் சாருகின்றதென்றதன் கருத்து அதற்கும் அனந்தத்திற்குமுள்ள மதிப்பின் வித்தியாசம் வரவரக் குறைந்துகொண்டே போகின்றது என்பதல்ல. அனந்தம் என்பது முடிவு பேறுடையதாய் நிர்ணயமுறுவதோர் எண்ணிக்கை யல்ல. அச் சொல்லுக்கென்று தனிப்பட்ட அர்த்தமில்லை. $x=\infty$ என்னும் சமன்பாடு சாதாரண பஷத்தில் அர்த்தமில்லாக் கூற்றாகும். $x\to\infty$ என்னுங் குறியீடு

x என்னும் மாறியின் மதிப்பு முடிவு எல்லையின்றிப் பெருகிக்கொண்டே செல்லுகின்றதெனக் காட்டுவதாகும்.

15. $X \to 0$: மேலும், x ன் மதிப்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட நிலைபேருன எண்ணிக்கையைச் சார்ந்து அவ்வளவே நிலைத்து, அவவெண்ணிக்கை எவ்வளவு சிறியதாக விளங்கும்படி கொடுத்தாலும் அதனைக் கடவாமல் நிற்குமாயின், அப்பொழுது நாம் x ன் மதிப்புப் பூஜ்ஜியத்தை நாடுவதாகக் கருதிக்கொண்டு அதனை $x \to 0$ என்ற குறியீட்டால் புலப்படுத்துகின்றோம்.

7. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆனல், $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}=1$ என்று காட்டுக.

8. $\left[\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right]=2$ என்று காட்டுக.

9. $10-\sqrt{24}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ ன் வர்க்க மூலம் அறிக :

[வர்க்க மூலத்தை $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$ என்னும் வடிவில் கொள்க.]

[விடை : $\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$]

10. $35-12\sqrt{6}+6\sqrt{10}-4\sqrt{15}$ ன் வர்க்க மூலத்தை அறிக :

[விடை : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\sqrt{3}$]

11. $6-\sqrt{8}-\sqrt{12}+\sqrt{24}$ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டு பிடிக்க.

[விடை : $\sqrt{2}-1+\sqrt{3}$]

12. $14-2\sqrt{15}-2\sqrt{30}+6\sqrt{2}$ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டறிக.

[விடை : $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$]

III. இலாகிருதம் அல்லது மடக்கை (Logarithm)

1. வரையறை

கொடுத்த அடியையொட்டி ஒரு எண்ணின் இலாகிருதமாவது, அவ்வெண்ணின் மதிப்பைப் பெறுதற்கு அவ்வடியை எவ்வளவுக்கு உயர்த்த வேண்டுமென்பதைக் காட்டும் அடுக்குக் குறியேயாம்.

(அல்லது) எண்ணுக்கு நிகரான மதிப்புடைய அடி எண்ணின் மடங்கெண் ஆகும்.

இங்ஙனம் $\log_2 8=3$, $2^3=8$ ஆதலின்.

$\log_{10} 100=2$, $10^2=100$ ஆதலின்.

குறிப்பு: இயல்கணிதத்தில் (Algebra) அடுக்குக் குறி (Index or exponent) என வழங்குவது இலாகிருதமேயாகும்.

$2^3=8$ என்ற சமன்பாடு, 8 என்ற எண், 2 என்ற அடி (base), 3 என்ற அடுக்குக் குறி ஆகியவற்றிற்குள்ள ஒரு தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

இதையே, 2 என்ற அடிக்கு 8ன் இலாகிருதம் 3 என்று கூறலாம்

பொதுவாக $a^x=N$ ஆனல்,

'a' என்ற அடிக்கு 'N'ன் இலாகரிதம் x ஆகும்.

இதையே $\log_a N=x$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

$a^x=N$, $x=\log_a N$ என்னும் இருவகைக் கூற்றும் ஒரே விஷயத்தை (கருத்தை) இரண்டு வகைகளாகக் கூறியதாகும்.

உதாரணமாக $3^4=81$ என்பதை அறிவோம். இது $\log_3 81=4$ ஆகும்.

இவ்வாறே, $4^{\frac{1}{2}}=2$. $\therefore \log_4 2=\frac{1}{2}$

$$100^{-\frac{1}{2}}=\cdot 1 \quad \therefore \log_{100}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

குறிப்பு 2: 'மடக்கை' என்னும் சொல்லைச் சுருக்கமாக 'மகை' என்று கொண்டால், '$\log_a N=x$' என்பதை. 'மகை$_a$ $N=x$' என்று எழுதலாம்.

2. இயற்கை வரிசையிலுள்ள எல்லா தன ராசியெண்களையும் ஓரே தன ராசி அடியின் அடுக்குகளாகக் கூறுதல் இயலும். இவ்வகையில் அவ்வடிக்கு அடுக்குகளாக அவ்வவ்வெண்களின் இலாகிருதங்களே கண்ணுற்று நிற்கும்.

உதாரணமாக, 10ஐ அடிப்படை எண்ணைக் கொண்டு இயற்கை வரிசையிலுள்ள எல்லா எண்களையும் 10-ன் அடுக்குகளாக எழுதலாம்.

$$1=10^0 \quad \therefore \log_{10} 1=0$$

$$10=10^1 \quad \therefore \log_{10} 10=1$$

$$100=10^2 \quad \therefore \log_{10} 100=2$$

$$1000=10^3 \quad \therefore \log_{10} 1000=3$$

இதில் அடுக்குக் குறிகளாக அமையும் 0, 1, 2.......என்பவை இயற்கை வரிசையில் உள்ள 1,...10,...100,...1000 ஆகியவற்றின் இலாகிருதங்களேயாகும்.

குறிப்பு: '1'ன் எந்த அடுக்கும் 1 ஆகவே நிற்பதால், 1 என்ற எண் இலாகிருத முறைக்கு அடியாக ஏற்கப்படாது.

எந்த ருண எண்ணின் அடுக்குகள் தன எண்ணாகவும், ருண எண்ணாகவும் மாறி, மாறி வருவதால், எந்த ருண எண்ணும் இலாகிருத முறைக்கு அடியாக ஏற்கப்படாது.

எனவே, 1 என்னும் எண் நீங்கலாக யாதேனுமொரு தன ராசியெண்ணை இலாகரித முறைக்கு அடியாகக் கொள்ளுதற்கு ஏற்கும்.

3. ஆயினும் இரண்டு வகையான இலாகிருத முறைகளே முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை.

(i) 10ஐ அடியாகக் கொண்ட முறையே எல்லா செய்முறை கணக்கீடுகளுக்குப் பயன்படும். இது பொது (common) அல்லது பிரிக்ஸியன் (Briggsian) அல்லது தெனரி (Denary) இலாகரிதம் எனப் படும்.

(ii) 'e' என்னும் பிரசித்தமான எண்ணை அடியாகக்கொண்ட முறை :

2·718......என்னும் தோராய மதிப்புடைய விகிதமுறு (irrational) 'e' என்னும் பிரசித்தமான எண்ணை அடியாகக்கொள்ளும் முறைக்கு இயற்கையான (Natural) அல்லது நேப்பியர் (Napierian) இலாகரித மெனப்படும்.

இது எல்லா அறிமுறை (Theoretical) உயர்கணிதத்தில் பயன் படுவதாகும்.

4. பின்வரும் இலாகிருதத் தன்மைகள், 1க்கு மேற்பட்ட யாதொரு அடிக்கும் பொருந்துவனவாகும்.

(i) ஒரு அடியின் இலாகிருதம் தன்னடிக்கே $=1$

(ii) ஒருதன அடிக்கு ஒரு ருண எண்ணின் இலாகிருதம் கற்பனை யானதாகும் (Imaginary).

(iii) $a^{-\infty} \to 0$ ஆதலின், பூஜ்யத்தின் இலாகரிதம் $-\infty$ ஆகும். ($-\infty$ ஐ நிர்ணயமுறுவதோர் எண்ணாகக் கருதக் கூடாது)

(iv) $a^{0}=1 (a \neq 0)$ ஆதலின், எந்த அடிக்கும் 1 ன் இலாகிருதம் பூஜ்ஜியமே ஆகும்.

(v) ஒரு எண்ணின் மதிப்பு 0க்கும் 1க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும் பொழுது இலாகிருதம் ருண ராசி எண்ணாகும் ; அவ்வெண் 1 ஆனால், அதன் இலாகிருதம் '0' ஆகும் ; அவ்வெண் 1 க்கு அதிகப்படின் அதன் இலாகிருதம் தனராசி யெண்ணாகும்.

(vi) முடிவிலியின் (infinity) இலாகரிதம் முடிவிலிலேயாகும்.

(vii) $a^{\log_a N} = N$

$[a^x = N$ ஆனால், $\log_a N = x \therefore a^{\log_a N} = N]$

5. இலாகிருத விதிகள் (Laws of Logarithms)

முன்பே கூறியபடி இலாகிருதம் அடுக்குக்குறியே. எனவே, அடுக்குக் குறிக்குரிய விதிகளையே இலாகரிதம் பின்பற்றுகிறது.

பின்வரும் விதிகள் எந்த அடிக்கும் பொருந்தும்.

இவை அடுக்குக்குறி விதிகளை வேறுவடிவில் கூறிக்கொள்ளும் அத்துணையேயாம்.

I பெருக்கல் (பலன் பற்றிய) விதி

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

அதாவது, இரண்டு எண்களின் பெருக்கெண்ணின் மடக்கை அவ்விரண்டு எண்களின் தனித்தனி மடக்கைகளின் கூட்டெண்ணாகும்.

நிரூபணம் :

$\log_a M = x$ ம், $\log_a N = y$ ம் ஆகுக.

அப்பொழுது $M = a^x$ ம், $N = a^y$ ம் ஆகும்.

$\therefore \quad MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\therefore \quad \log MN = x + y = \log_a M + \log_a N$

கிளை:

$$\log_a \ldots\ldots MNP = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \ldots\ldots$$

II. ஈவு (வகுத்தல் பலன்) விதி

$$\log\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

அதாவது இரண்டு எண்களின் ஈவுடைய மடக்கை தொகுதியின் மடக்கையினின்றும் பகுதியின் மடக்கையைக் கழித்த எண்ணாகும்.

நிரூபணம் ;

$\log_a M = x$ ம், $\log_a N = y$ ம் ஆகுக

$\therefore \quad M = a^x, \ N = a^y$

$\therefore \quad \frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore \quad \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = x - y = \log_a M - \log_a N$

III. அடுக்குவிதி

$$\log_a(M^p) = p \log_a M$$

நிரூபணம் ;

$\log_a M = x$ ஆகுக.

அப்பொழுது, $M = a^x$

$\therefore \quad M^p = (a^x)^p = a^{px}$

$\therefore \quad \log_a(M^p) = px = p \ . \log_a M$

கிளை ;

$$\log_a \sqrt[q]{M} = \log_a M^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q} \log_a M$$

IV. அடி மாற்றம் (change of base)

'a' அடிக்கு எண்களின் இலாகிருதங்கள் அடங்கிய அட்டவணையைக் கொண்டு புதிய அடிக்கு அவ்வெண்களின் இலாகிருதங்களைப் பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்தி எளிதாக மாற்றியமைக்கலாம்.

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

நிரூபணம் :

$\log_b N = x$ ஆகுக.

$\therefore \quad b^x = N$

'a'ன் அடிக்கு இரு பக்கங்களிலும் இலாகிருதம் எடு.

அப்பொழுது, $\log_a b^x = \log_a N$ ஆகும்.

அல்லது $x . \log_a b = \log_a N$

$$\therefore \qquad x=\frac{\log_a N}{\log_a b}$$

அதாவது $$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$$

கிளை 1. $N=a$ என்று இட,

$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}\text{ ஆகும்.}$$

கிளை 2. கிளை 1லிருந்து, $\log_b N=\log_a N\times\log_b a$

குறிப்பு: கிளை 1, கிளை 2, இவற்றை இலாகரித வரையறையைக் கொண்டு நிரூபி. (Prove from first principles)

'e' என்பது விகிதமுரு எண்ணுனாலும், 'e' அடிக்கு அமைந்த இலாகிருதங்களை வேண்டிய அளவுக்குத் திருத்தமாகக் கொள்ளலாகு மென்பது 'மேல் வகுப்பு இயற்கணிதத்தில்' காட்டப்படும். இவற்றி லிருந்து 10 என்னும் அடிக்கு ஏற்புடைய இலாகிருதங்கள் கீழே விளக்கியபடி வருவித்துக் கொள்ளப்படும்.

கிளை 3: $$\log_{10}N=\frac{\log_e N}{\log_e 10}=\frac{1}{\log_e 10}\log_e N=\mu\log_e N$$

இங்கு $\mu=\dfrac{1}{\log_e 10}=\cdot 4343$ ஆம்.

இதனால், 'e' அடிக்கு அமைந்த இலாகிருதங்களை 'μ' என்ற "மாற்ற அளவை" (modulus) யால் பெருக்கி 10 என்னும் அடிக்குரிய இலாகிருதங்களைப் பெறலாம்.

குறிப்பு: 10ஐ அடியாகக் கொண்டு, முறையே 4, 7 தசமத் தானத்திருத்தமாக எந்தெந்த எண்களுக்கு இலாகரிதம் எவ்வளவு என்று கண்டுகொள்ளக்கூடிய இலாகிருத அட்டவணைகள் உலகெங்கும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

மேலும், மறுதலையாக, வெவ்வேறு இலாகிருதங்களுக்குரிய எண் களைக் காண, 'மடக்கையின் எதிர்மறை' (Antilogarithm) அட்ட வணைகளும் தனியாக உண்டு.

மேற்கண்ட இலாகிருத விதிகளின் பலன்களிலிருந்து ஒரு இலாகிருத அட்டவணையின் உதவியால், (சிக்கலான பெரிய) பெருக்கல்களைக் கூட்டல்களாகவும், வகுத்தல்களைக் கழித்தல்களாகவும், அடுக்குக் கணிப்புக்களைப் பெருக்கல்களாகவும், மூலக் கணிப்புக்களை வகுத்தல் களாகவும் செய்யலாம் என்பது விளங்கும்.

உதாரணம் a, b என்ற இரு எண்களைப் பெருக்க வேண்டுமானால், $\log a, \log b$ என்பவைகளின் மதிப்பை அறிந்து, அவைகளைக் கூட்டி, அப்படிக் கூட்டி வந்த தொகையை இலாகிருதமாகக் கொண்ட எண் எது என்று அட்டவணையைப் பார்த்துப் பெருக்கல் பலனை அறியலாம்.

விஞ்ஞானம், வானவியல், பொறியியல் திரிகோண மிதி முதலியவற்றில் வரும் பல கணக்கீடுகளில் இலாகிருதம் பயன்படுகிறது.

செய்முறை கணக்கீடுகளில் இலாகிருதம் பயன்படும் முறையை அதிக விரிவாக அடுத்து வரும் பிரிவுகளில் ஆராய்வோம்.

விளக்க மாதிரிகள்:

மாதிரி 1: $\log_b a \times \log_a b = 1$ என்று நிரூபிக்க:

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

$\log_b a = x$ என்றும், $\log_a b = y$ என்றும் கொள்ள

$a = b^x$ ம்; $b = a^y$ ம் ஆம்

$\therefore \quad a = (a^y)^x = a^{xy}$

அதாவது, $a^1 = a^{xy}$

$\therefore \quad xy = 1$

ஆகவே, $\underline{\log_b a \times \log_a b = 1}$

மாதிரி 2

$x^2 + y^2 = 6xy$ ஆனால், $2 \log (x+y) = \log x + \log y + 3 \log 2$ என்று நிரூபிக்க.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$= 6xy + 2xy = 8xy = 2^3 xy$$

$\therefore \quad \log (x+y)^2 = \log [2^3 xy]$

அதாவது. $2 \log(x+y) = \log 2^3 + \log x + \log y$

$= 3 \log 2 + \log x + \log y$

$\therefore \quad 2 \log (x+y) = \log x + \log y + 3 \log 2$

பயிற்சி 3·1

1. சுருக்குக:

(i) $\dfrac{\log_a 64 - \log_a 1}{\log_a 4 - \log_a 1}$

[விடை: 3]

(ii) $\dfrac{\log_x 125 - \log_x 25}{\log_x 25 - \log_x 5}$

[விடை: 1]

2. இலாகிருதங்களை அறிக:

(i) $\sqrt{7}$ அடிக்கு 343ன் இலாகிருதம்

[விடை: 6]

(ii) $2\sqrt{3}$ அடிக்கு 144ன் இலாகிருதம்

[விடை: 4]

(iii) ·5 அடிக்கு ·25ன் இலாகிருதம்

[விடை: 2]

(iv) $2\sqrt{2}$ அடிக்கு $\frac{1}{256}$ன் இலாகிருதம்

[விடை: $-\frac{16}{3}$]

(v) $5\sqrt{5}$ அடிக்கு 125ன் இலாகிருதம்

[விடை: 2]

3. ·25, 7, ·64 என்ற அடிகளுக்கு முறையே $\frac{1}{2}$, 2, $-\frac{1}{2}$ என்பவற்றை இலாகிருதங்களாகக் கொள்ளும் எண்களைக் கண்டுபிடி.

[விடை: ·5, 49, 1·25]

4. (i) $32\sqrt[3]{4}$ன் இலாகிருதமாக $3{\cdot}6$ வரக்கூடிய அடியைக் கண்டுபிடி.

[விடை: $2\sqrt{2}$]

(ii) $729\sqrt[3]{27}$ன் இலாகிருதமாக $4\frac{2}{5}$ வரக்கூடிய அடி யாது?

[விடை: $3\sqrt{3}$]

5. $\log(1+2+3)$யானது $\log 1+\log 2+\log 3$க்குச் சமமாகுமா?

6. மதிப்பைக் கண்டறிக:

(i) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 8$

[விடை: 3]

(ii) $3\log\frac{3}{4}-\log\frac{27}{64}$

[விடை: 0]

7. நிரூபி.

(i) $\log_{10}\frac{15}{16}+\log_{10}\frac{64}{81}-\log_{10}\frac{4}{27}=\log_{10}5$

(ii) $\log_{10}1600=2+4\log_{10}2$

(iii) $\log_3 10=\dfrac{1}{\log_{10}3}$ இலிருந்து $\log_3 30$ ஐக் கண்டுபிடி.

(iv) $\log_a N+\log_{1/a}N=0$,

8. $\log_{10}2={\cdot}3010$, $\log_{10}3={\cdot}4771$ ஆனால்,

(i) $\log_{40}18$ (ii) $\log_{10}432$ காண்க.

[விடை: ${\cdot}7835$; $2{\cdot}6353$]

9. (i) $\log_b a\,.\,\log_c b\,.\,\log_a c=1$ என்று காட்டுக.

(ii) $\log_a b\,.\,\log_b c\,.\,\log_c a=1$ என்று காட்டுக.

(iii) $\log_b a\,.\,\log_c b\,.\,\log_d c=\log_d a$ என்று காட்டுக.

10. $\dfrac{1}{\log_a abc}+\dfrac{1}{\log_b abc}+\dfrac{1}{\log_c abc}=1$ என்று நிரூபி.

11. $\log_a M\,\log_b N=\log_b M\,\log_a N$ என்று காட்டுக.

12. $\log_a M \log_b N \log_c P = \log_b M \cdot \log_c N \log_a P$ என்று காட்டுக.

13. $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$, $z = \log_c ab$ ஆனால்,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1 \text{ என்று நிருபி.}$$

அதை யொட்டியோ, வேறு வகையாலோ, $zyx = x+y+z+2$ என்று நிருபிக்க.

14. $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ ஆனால்,

(i) $2f(x) = f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ என்று நிருபிக்க.

(ii) $3f(x) = f\left(\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ என்று நிருபி,

15. $\log(x+y) = \log 3 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$ எனில்,
$x^2 + y^2 = 7xy$ என்று நிருபிக்க

16. $\log(x+y) = \log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$ ஆனால்,
$x = y$ என்று நிருபி

17. $2 \log_8 N = p$; $\log_2 2N = q$; $q - p = 4$ எனின், N ன் மதிப்பென்ன ?

[விடை : 2^9]

18. a, b, c என்பன அடுத்தடுத்த மூன்று தன ராசிகளானால், $\log(1+ac) = 2 \log b$ எனக் காட்டுக.

19. தீர்வு காண்க : $\log_a(5a-3) - \log_a 2 = 2b$ என்று காட்டுக.

[விடை ; $a = 3/2$]

20. $a^{\log b - \log c}\; b^{\log c - \log a}\; c^{\log a - \log b} = 1$ என்று காட்டுக.

6. பொது இலாகிருதங்கள் :

10 என்னும் அடிக்கு அமைந்த இலாகிருதங்கள் பொது இலாகிருதங்கள் எனப்படும். இவை எல்லா செய்முறை கணக்கீடு

களுக்கும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இந்த முறையினை அதிக விரிவாக ஆராய்வோம்.

குறிப்பு : ஒரு குறிப்பிட்ட இலாகிருத திட்டத்தை யநுசரிப்பதாக அறிய நின்ற விடத்து, அவ்வடியைக் குறிக்கும் பிற்சேர்க்கைக் குறி (Suffix) சாதாரணமாக விட்டெழுதப்படும்.

பின்வரும் குறிப்புக்ககள் கவனிக்கத் தக்கனவாம்.

(i) ருண ராசி எண்களின் இலாகிருதம் கற்பிதமானவையாம். (Imaginary)

(ii) $\log_{10} 0 \rightarrow -\infty$ ($10^{-\infty} \rightarrow 0$ ஆதலின்)

(iii) $\log_{10} 1 = 0$ ($10^{0} = 1$ ஆதலின்)

(iv) $\log_{10} \infty \rightarrow \infty$

குறிப்பு : ∞ ஐ எண்ணாகக் கருதக்கூடாது.

இங்ஙனமாக, 0க்குக் குறைந்த எண்களின் இலாகரிதம் கற்பனையானவையாம்; 0 க்கும் 1 க்கும் இடைப்படு எண்களின் இலாகரிதம் ருண ராசியாகி $-\infty$ க்கும் 0 க்கும் இடையில் பரந்து பட்டு நிற்கும்; 1 க்கு மேற்பட்ட எண்களின் இலாகிருதம் தனராசி யாகும்.

எண்களை x அச்சிலும், அவற்றின் இலாகரிதங்களை y அச்சிலும் விளக்கிக்காட்டி அடுத்து நிற்குமோர் வரைப்படமானது எண்களின் மாறுதல்களோடு அவற்றின் இலாகரிதங்களும் மாறுதல் எய்தும் தன்மையினைப் பற்றியதோர் கருத்தினை நமக்குத் தெளிவு படுத்துகின்றது.

மறுபடியும் பின்வருவனவற்றைக் கவனிக்கவும் :

A. (i) $\log_{10} 1 = 0$

(ii) $\log_{10} 10 = 1$; $\log_{10} 100 = 2$; $\log_{10} 1000 = 3$........... $\log_{10} \infty \rightarrow \infty$.

B. (i) $\log_{10} 1 = 0$

(ii) $\log_{10} \cdot 1 = -1$

(iii) $\log_{10}.01 = -2$;

(iv) $\log_{10}.001 = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots \log_{10}0 \rightarrow -\infty$.

மேற் காட்டிய இருவகை வரிசைகளிலிருந்து 10 ன் தன அல்லது ருண ராசி முழு எண் அடுக்குகள் பெற்ற எண்கள் ஆனவை அல்லாத மற்றைய எண்களின் இலாகரிதங்கள் ஒரு முழுவெண் பாகத்தையும் ஒரு தசமப் பாகத்தையும் பெறுதல் வெளிப்படையாகும்.

7 முழுவெண் பாகமும் (Characteristic : **மடக்கையின் நேர்க்கூறு**), **தசம பாகமும்** (Mantissa : **மடக்கையின் பதின்மானக்கூறு**)

ஒரு இலாகிருதத்தின் முழுவெண் பாகமும், தசமப் பாகமும் முறையே **மடக்கையின் நேர்க்கூறு** Charactefistic) என்றும், **மடக்கையின் பதின்மானக் கூறு** (Mantissa) என்றும் வழங்கப்படும்.

1 க்கும் 100 க்கும் இடையே மிக நெருக்குற்று நிற்கும் எண்ணினத் தொகுதிகளுக்கு உரிய பொது இலாகரிதங்கள் நமக்குக் கண்டறிந்து வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றை அடைந்த வகைகள் இங்கு விவரிக்கப்படா.

$\log_{10}1 = 0; \log_{10}10 = 1$ ஆதலின், 1க்கும் 10க்கும் இடையிலுள்ள எண்களின் இலாகரிதங்கள் தசம பின்னங்களேயாகும். ஏதேனுமொரு எண்ணின் இலாகரிதத்தைக் கண்டறிய, அதை 1 க்கும் 10 க்கும் இடையில் கிடப்பதோர் எண்ணென்றும், 10ன் முழு எண் அடுக்கேற்ற பிறிதொரு எண்ணென்றும் ஆக இரண்டு காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாகும்படி பிரித்து எழுதுகின்றோம். அவ்வாறெழுதியக்கால், அவ்வெண் நியம வுருவத்தில் இருப்பதாகச் சொல்லப்படும்.

உதாரணம் ; 1234·5 என்ற எண் நியம ரூபத்தில் $10^3 \times 1{\cdot}2345$ என்று எழுதப்படும். இக் காரணிக்குள் 10 ன் அடுக்குக்குறியே இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகமாகும். மற்ற நியம ரூபத்தில் உள்ள காரணி அட்டவணையில் கண்டறியக்கூடிய இலாகரிதத்தின் தசமப பாகத்தை நிர்ணயிக்கும்.

மேலும், சிற்றிலக்கங்களின் ஒரே தொடர்வரியைக் கொண்டு நிற்பனவாயும், ஆனால் தசமப்புள்ளி நிற்கும் இடத்தை நோக்க வேறு

பட்டுக் காண்பனவாயும் உள்ள எண்கள் ஒரே நியமரூபத்தைப் பெறுதலால், இந்த எண்களுக்குரிய இலாகிருதங்களின் தசமப்பகுதி ஒன்றேயாகி, எண்ணிலுள்ள சிற்றிலக்கங்களின் தொடர்ச்சியைச் சார்ந்தே நிற்கும். இதனால், இலாகிருத அட்டவணை தசமப்பாகங்களின் அட்டவணையேயாகும். இக்காரணத்தால், அட்டவணையில் எண்களிலோ தசமப் பாகங்களிலோ புள்ளியீடு இடம் பெறவில்லை. இவ்வட்டவணைகளிலிருந்து நாம் அறிய வேண்டுவன வெல்லாம் கொடுத்த எண்ணிலுள்ள சிற்றிலக்கங்களின் தொடர்வரிசைக்கு ஒத்தவாறு நிற்கும் இலாகிருதத்திற்குரிய சிற்றிலக்கங்களின் தொடர்வரிசை யொன்றே யாகும்.

உதாரணம் : அட்டவணையிலிருந்து $\log 2{\cdot}45 = {\cdot}3892$ என்று கிடைக்கப்பெறுகின்றோம்.

பிறகு, $24{\cdot}5 = 10 \times 2{\cdot}45 = 10^1 \times 10^{\cdot 3892} = 10^{1\cdot 3892}$ ஆவதால், $\log 24{\cdot}5 = 1{\cdot}3892$ ஆம்.

மறுபடியும், ${\cdot}00245 = 10^{-3} \times 2{\cdot}45 = 10^{-3} \times 10^{\cdot 3892} = 10^{\bar{3}\cdot 3892}$

$\therefore \quad \log {\cdot}00245 = \bar{3}{\cdot}3892$ ஆம்.

இங்கு 3 ன் தலையில் இட்டகோடு இலாகரிதத்தின் முழு எண்பாகம் மட்டும் ருண ராசியைச் சார்ந்த தாகுமெனக் காட்டுகிறது. ஆனால் தசம பாகம் தன ராசியேயாகும். முழு எண்பாகமும், தசம பாகமும் வேறு பிரித்து வைக்கப்பட்டுள்ளன. நாம் $\bar{3}{\cdot}3892$ ஐ அதாவது $-3 + {\cdot}3892$ ஐ $-2{\cdot}6108$ என்றாற் போல எழுதுவதில்லை. இவ்வாறு செய்தால், இலாகரிதம் முழுமையுமே ருண ராசியாகி, தசம பாகமும் ஒரே வகையான சிற்றிலக்கத் தொடர்ச்சியுடைய எண்களுக்கு மாறிவிடும். ஆனால், நாம் தசமப்பாகத்தைத் தனராசி யெண்ணாக வைத்து, முழு எண் பாகத்தை மட்டும் வேறுபட்டுச் செல்ல விட்டால், ஒரேவகையான சிற்றிலக்கத் தொடர்ச்சியுடைய எண்கள், ஒரே வகையான தசமப்பாகத்தைப் பெற்று நிற்கும். இது இலாகிருத அட்டவணைகளைத் தயாரிப்பதில் பேரநுகூலம் செய்யும்.

இங்ஙனமாகவே, 2·45 ன் இலாகிருதத்தை நாம் அறிந்து கொண்டோமானால், அதைக்கொண்டு தசமப்புள்ளியை ஏற்றவாறு

இடந்தள்ளி வைத்து 1·45 லிருந்து பெறக்கூடிய எல்லா எண்களின் இலாகிருதங்களையும் உடனடியாக எழுதிக்கொள்ளுதல் கூடும்.

ஆகவே log 24·5 = 1·3892 2·45 என்ற நியம ருபத்திலுள்ள தசமப்புள்ளியை வலப்பக்கமாக ஓரிடந்தள்ளிவைத்தால் 24·5 ஆகப் பெறுகின்றோம். இதற்கேற்ப இலாகிருதத்தின் முழு எண் பாகத்தில் 1 நிற்பது ஆயிற்று.

log ·00245 = $\bar{3}$·3892 ஆகும். 2·45 லிருந்து ·00245 பெற' நியமருபத்திலுள்ள தசமப்புள்ளியை 3 இடம் இடப்பக்கமாகத் தள்ளி வைக்கவேண்டும். இதற்கேற்ப, இலாகிருதத்தின் முழு எண் பாகத்தில் $\bar{3}$ நிற்பதாயிற்று.

இப்படி, சுலபமாக இலாகரிதம் காணும் முறை 10 ஐ அடியாகத் தேர்ந்து கொண்டதன் பயனாகும். இந்த காரணத்தினல்தான், 10 ஐ அடியாகக் கொண்டு அமைக்கப்பெற்ற இலாகரித முறை மற்ற அமைப்பு முறைகளைக் காட்டிலும் எண்முறைக் கணக்கிட்டுக்கு அதிக அநுகூலம் விளைப்பதாகின்றது.

முழு எண் பகுதியைக் காண்பதற்கு விதி :

எண் 1 க்கும் 10 க்கும் இடைப்பட்டதாகும் பொழுது இலாகிருதத்தின் முழு எண் பகுதி 0 ஆகும். அதாவது எண் நியம ருபத்தில் உள்ளபொழுது இங்ஙனமாகும். வேறு எண்களுக்குப், பார்த்த மாத்திரத்திலேயே முழு எண் பாகத்தை அறிந்து கொள்ளுதற்கு நாம் பின்வரும் விதியைப் பெறுகின்றோம். இந்த விதி யையே கீழ்க்கண்டவாறு வேறு வகையிலும் கூறலாம்:

ஒன்றுக்கு அதிகப்பட்டதோர் எண்ணுக்குரிய இலாகிருதத்தின் முழுவெண் பாகம் அவ்வெண்ணின் சிற்றிலக்க முழுவெண் தொகையில் ஒன்று குறைந்ததாகும்.

ஒன்றுக்குக் குறைந்ததோர் எண்ணுக்குரிய இலாகிருதத்தின் முழுவெண் பகுதியில் காணப்படும் எண்ணனது அவ்வெண்ணின் தசமப்பாகத்திலுள்ள பூஜ்யங்களின் தொகையோடு ஒன்றைக் கூட்டி குணராசிக் குறியிட்டு எழுதப்பட்டதாகும்.

கொடுத்த எண்ணின் தசமப்புள்ளியானது இவ்வெண்ணின் நியம ருபத்தில் இருந்த இடத்திலிருந்து எத்தனை இடம் தள்ளி

வைக்கப்பட்டுள்ளதென்பதை எண்ணிக் கொள்க. அப்புள்ளி வலம் நோக்கி n இடங்கள் தள்ளி வைக்கப்பட்டிருந்தால், இலாகிருதத்தின் முழு எண் பாகம் $+n$ ஆகும். அஃது இடப்பக்கமாக n இடம் தள்ளி வைக்கப்பட்டிருந்தால் முழு எண் பாகம் $-n$ ஆகும்.

8. பொது இலாகிருதங்களின் பிரயோசனங்கள் :

(i) மேற்கூறிய விதியினுல், முழு எண் பாகத்தைப் பார்வை அளவிலேயே கண்டறியலாம். தசமப்பாகம் மட்டும் அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக் கொள்ளப்படும்.

(ii) இலாகிருதத்தின் தசமப் பாகத்தை தனராசி எண்ணுகவே வைத்துக்கொண்டால், சிற்றிலக்கத் தொடர்ச்சியால் ஒத்துள்ள எண்களெல்லாம் ஒரே மாதிரியான தசமப் பகுதியையே கொள்ளும். ஆகவே, 1 முதல் 10 வரையிலுள்ள எண்களின் இலாகிருதங்களின் தசமப் பாகம் மட்டும் அட்டவணையில் குறித்தால் போதும். இதனுல், அட்டவணைகள் மிகச் சுருக்கம் வாய்ந்து தோன்றுகின்றன.

9. இலாகிருதங்களின் அட்டவணைகள் :

சேம்பருடைய (chamber's) இலாகிருத அட்டவணைகளில் இலாகிருத மதிப்புக்கள் ஏழு தசமஸ்தான சுத்தமாக முழு விளக்கத்துடன் தரப்பட்டுள்ளன. இவ்வட்டவணை ஏழிலக்க அட்டவணையெனப்படும். ஐந்து இலக்க, நான்கிலக்க அட்டவணைகளுமுள. ஐந்திலக்க அட்டவணை நான்கிலக்க அட்டவணையைவிடத் திருத்தமுடையதென்பதும், ஐந்திலக்க அட்டவணையைவிட ஏழிலக்க அட்டவணை திருத்தமுடையதென்பதும் வெளிப்படையாகும். ஆனுல், எல்லாச் செய்முறை காரியங்களுக்கும் நான்கிலக்க இலாகிருதங்களை உபயோகித்தே போதிய திருத்தம் பெறலாகும். மேற்கண்ட நான்கு இலக்க இலாகிருத அட்டவணைப் பிரதியை மாணவர்கள் உபயோகித்தறிய வேண்டும்.

10. நான்கு இலக்க இலாகிருத அட்டவணையை உபயோகிக்கும் முறை :

இடது பக்கத்தின் ஓரத்திலுள்ள இரண்டு எண்கள் ஓரெண்ணின் முதலிரண்டு இலக்கங்களாகும். அடுத்தடுத்து நிற்கும் பத்துப் பத்திகளின் தலைப்பில் நிற்கும் எண்களிலிருந்து மூன்ருவதாகிய இலக்கம் கண்டறியப்

படும். இவற்றையடுத்து வித்தியாசப் பத்திகள் எனப்படும் ஒன்பது வரிசைகளின் தலைப்பில் நிற்கும் எண்களிலிருந்து நான்காவது இலக்கத்தைக் கண்டறிய வேண்டும்.

உதாரணம் 1: log ·002967ஐக் கண்டறிதல்

இந்த இலக்கத் தொடர்வரிசையால் அமையும் நியம ரூபத்தில் தசமப்புள்ளி தானிருக்க வேண்டிய இடத்திலிருந்து இடது பக்கமாக மூன்றிடந் தள்ளி வைக்கப்பட்டால், கொடுத்த எண் வருமாதலின், இலாகிருதத்தில் முழுஎண் பாகத்தில் 3 இடம் பெறும். தசமப் பாகத்தை யறிய, அட்டவணையைப் பார்த்து ·29 நிற்கும் வரிசையில் 6 என்னும் எண் தலைப்பெய்திய பத்தியில் பார்க்க 4713 என்னும் எண் காணப் படும். இது 296 என்னும் இலக்கத் தொடர்ச்சியுள்ள எல்லா எண் களுக்கும் ஏற்புடைய இலாகிருதத்தின் தசமப்பாகமாகும். இனி நான்காவது இலக்கமாகிய 7க்கர்க இத்தசமப்பாகம் திருத்தப்பட வேண்டும். ஆகவே, அதே வரிசையில் 7 என்னும் எண் தலைப்பெய்திய இடை வித்தியாசப் (Mean Difference) பத்தியில் பார்க்க 10 காணப் படும். ஏற்கனவே பெற்ற 4713 உடன் வித்தியாசப் பத்தியிற் கண்ட 10ஐயும் கூட்ட 4723 வரும். இங்ஙனம் 4723 என்று கிடைத்த தசமப் பாகம் 2867 என்ற இலக்கங்களைத் தொடர்ச்சியாகக் கொள்ளும் எல்லா எண்களுக்கும் பொருந்தும்.

முழு எண் கூறு 3 ஆதலின், log $\cdot 002967 = \bar{3}\cdot 4723$ ஆம்.

உதாரணம் 2: 296743ன் இலாகிருதமறிதல்

இங்கு 2·96843 என்னும் நியம ரூபத்தில் காணப்படும் தசமப்புள்ளி யானது தானிற்கும் இடத்திலிருந்து 5 ஸ்தானங்கள் வலப்பக்கமாகத் தள்ளிப்போய் நின்றதானல், 296743 என்னும் எண் கிடைக்கப் பெறும். ஆகவே 296743க்கு உரிய இலாகிருதத்தின் முழு எண் பாகத் தில் +5 இடம் பெற்று நிற்கும்.

296743ன் தசமப்பாகமும் 2967·43ன் தசமப்பாகமும் ஒன்றே யாகும். ·43 ஆனது ·5க்குக் குறைந்ததாதலின் அதைப் புறக்கணித்து 2967 என்று சுத்தஞ் செய்துகொள்ளலாம். இப்பொழுது 2967ன் தசமப் பாகம் ·4723 ஆம்.

ஆகவே, log 296743 = 5·4723 ஆம் (தோராயமாக)

11. மடக்கையின் எதிர்மறை அல்லது எதிர்நிலை இலாகிருதம் (Antilogarithm)

கொடுத்த இலாகிருதத்திற்கு ஏற்புடைத்தாகிய எண் எதிர்நிலை இலாகிருதமெனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக log ·002967 = $\bar{3}$·4723 என்று அறிவோம்.

மறுதலையாக, antilog $\bar{3}$·4723 = ·002967 ஆகும்.

எதிர்நிலை இலாகிருதத்திற்கும் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து ஒரு எண்ணின் இலாகிருதம் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த எண்ணைக் கண்டறியலாம். தசமப்பாகம் மட்டுமே பொருளுடைய (Significant figures) இலக்கங்களை நிர்ணயிப்பதால், வெவ்வேறான தசமப்பாகத்திற்கே எதிர்நிலை இலாகிருத அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்த அட்டவணையில் இடப்பக்கத்தின் ஓரத்திலுள்ள ஜதை எண்கள் தசமப் பாகத்தின் முதலிரண்டு இலக்கங்களாகும். அடுத்து வரும் பத்துப் பத்திகளின் தலைப்பில் நிற்கும் எண் தசமப் பாகத்தின் மூன்றாவது எண்ணாகும். தசமப்பாகத்தின் நான்காவது இலக்கமானது இறுதியில் வித்தியாசப் பத்தியின் தலைப்பில் நிற்கும் எண்களிலிருந்து கொள்ளப்படும்.

கொடுத்த தசமப் பாகத்தில் முதல் இரண்டு இலக்கங்களை அட்டவணையின் ஓரத்தில் உள்ள ஜதை எண்களில் நாடி, அதே வரிசையில் தசமப் பாகத்தின் மூன்றாம் இலக்கத்தின்கீழ் உள்ள எண்ணைக் குறித்துக் கொள். வித்தியாசப் பத்தியில் தசமப்பாகத்தின் நான்காவது இலக்கத்தின் கீழ் உள்ள எண்ணைக் கண்டு மேலே குறித்துக்கொண்ட எண்ணுடன் சேர்த்துக்கொள். இவ்வாறு கிடைக்கும் எண், கொடுத்த தசமப்பாகத்திற்குரிய எண்ணின் இலக்கத் தொடர்ச்சியாகும். அதற்குமேல், கொடுத்த முழு எண் பாகத்தில் நிற்கும் எண்ணுக்கேற்றவாறு தசமப் புள்ளியை தக்க இடத்தில் இடு.

உதாரணம்: எதிர் log **2·1063** அறிக.

·10 நிற்கும் வரிசையிலும் 6 தலைப்பெய்திய பத்தியையும் ஒருங்கு நோக்கிப் பொதுவாகிய எண்ணைக் காண்க. இது 1276 ஆம். அதே வரிசையில் வித்தியாசப் பகுதியில் 3 தலைப்பெய்திய பத்தியை நோக்கி அங்கு நிற்கும் எண்ணைக் காண்க. அது 1 ஆம். அதை 1276 ஒடு கூட்ட 1277 ஆம். இது கொடுத்த தசமப் பாகத்திற்குரிய எண்ணின் இலக்கத் தொடர்ச்சியாகும்.

இனி, முழு எண் பகுதியில் 2 நிற்பதால், வேண்டிய எண் ஒரு தசமப் பின்னமாகவும், அதன்கண்ணுள்ள தசமப்புள்ளி நியமரூபத்தில் நிற்றற்குரிய இடத்திலிருந்து இரண்டு இடங்கள் இடப்பக்க நோக்கிப் பெயர்ந்து நிற்கும் என அறியலாம். ஆகவே, வேண்டிய எண் 0·01277 ஆகும்.

குறிப்பு: எப்பொழுதும் தசம பாகத்தைத் தன ராசியாகவே நிறுத்துக:

சில சமயங்களில் முற்றிலும் ருண ராசியாகிய இலாகிருதத்தையும் கையாள வேண்டி வருகின்றது. அப்பொழுது, எண் கணித யுக்தியால், தசமப் பாகத்தைத் தன ராசியாக எழுத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு எண்ணின் இலாகிருதம் $-1·3207$ ஆனால், அதை நாம் $-1-·3207=-2+1-·3207=-2+·6793=\overline{2}·6793$ என்று எழுதுகின்றோம்.

1 முதல் 10வரையிலுள்ள எண்களின் இலாகிருதத்தினுடைய தசமப் பாகம் தனராசிகளே யாகும். எதிர்நிலை இலாகரித அட்டவணை இந்த தனராசி தசமப்பாகத்திற்கு ஒத்த இலக்கத் தொடர்ச்சியை காட்டுதலால், ருண ராசி இலாகிருதத்தின் தசமப்பாகத்தை நாம் தனராசி யாக எழுத வேண்டும்.

12. விளக்க மாதிரிகள்:

மாதிரி 1:

மதிப்பை அறிக. $\dfrac{(\overline{1}·234)^4 \times (2·09)^2}{(3·582)^3}$

கொடுத்த கோவையை x என்று குறிக்க :

$\therefore \quad \log x = 4 \log 1{\cdot}234 + 2 \log 2{\cdot}09 - 3 \log 3{\cdot}582$

$= 4 \times {\cdot}0913 + 2 \times {\cdot}3201 - 3 \times {\cdot}5541$

$= {\cdot}3652 + {\cdot}6402 - 1{\cdot}6623$

$= 1{\cdot}0054 - 1{\cdot}6623$

$= -{\cdot}6569$

$= -1 + 1 - {\cdot}6569$ [தசமப் பாகத்தை தன ராசியாக்க இவ்வாறு எழுதப்பட்டது.]

$= -1 + {\cdot}3431 = \bar{1}{\cdot}3431$

$\therefore \quad x =$ எதிர் $\log \bar{1}{\cdot}3431 = {\cdot}\mathbf{2204}$

மாதிரி 2 : **தீர்வு காண்க :** $2^{x+1}\ 5^{5-3x} = 100$

இரு பக்கங்களிலும், இலாகிருதத்தை எடுக்க :

அப்பொழுது,

$(x+1) \log 2 + (5-3x) \log 5 = \log 100 = 2$ என்று பெறுகின்றோம்.

அதாவது $x\,(\log 2 - 3 \log 5) = 2 - 5 \log 5 - \log 2$

இப்பொழுது, $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$

$\therefore \quad x\,[\log 2 - 3\,(1 - \log 2)] = 2 - 5\,[1 - \log 2] - \log 2$

$\therefore \quad x\,[4 \log 2 - 3] = 4 \log 2 - 3$

$\therefore \quad x = \dfrac{4 \log 2 - 3}{4 \log 2 - 3} = 1$

மாதிரி 3 : மதிப்பைக் காண்க : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(8{\cdot}675)^2}}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(8{\cdot}675)^2}}$ ஆகுக. $\quad \therefore \quad x = \dfrac{1}{(8{\cdot}675)^{2/3}}$

இரு பக்கங்களிலும் இலாகிருதங்காண,

$$\log x = \log 1 - \tfrac{2}{3}\log 8{\cdot}675$$

$$= 0 - \tfrac{2}{3}(\cdot 9383) = -\tfrac{2}{3}(\cdot 9383) = -\cdot 6255$$

$$= \bar{1}\cdot 3745)$$

$\therefore \quad x =$ எதிர் $\log \bar{1}\cdot 3745 = \cdot 2369$

மாதிரி 4: 4^{31}ன் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டறிக :

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

$x = 4^{31}$ என்க.

இரு மருங்கினும் பொது இலாகரிதங்கொள்ள,

$$\log x = 31 \log 4$$

$$= 31 \times \cdot 6021$$

$$= 18\cdot 6651$$

இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகத்தில் 18 இருப்பதால், 4^{31}ன் பெருக்கற் பலனில் 19 இலக்கங்கள் இடம் பெற்று நிற்கும்.

பயிற்சி 3·2

1. பின்வரும் எண்களுக்குரிய இலாகிருதங்களின் முழு எண் பாகத்தைப் பார்த்த அளவிலேயே கண்டெழுதுக :

(i) 2173·52 (ii) 17·9 (iii) 450 (iv) ·027 (v) ·2 (vi) ·94 (vii) ·625 (viii) 325467·8

2. log 2537ன் தசமப் பாகம் ·4043 ஆகும். இதைக்கொண்டு 2·537 ; 253·7 ; ·002537 ; 253700 ; ·000002537ன் இலாகிருதங்களைக் கண்டறிக.

3. 2·1729 ; 1·4771 ; 3·3031 ; ·5662 என்பவற்றைத் தமக்கு இலாகிருதங்களாகப் பெற்ற எண்களின் முழு எண் பாகத்தில் எத்தனை சிற்றிலக்கங்கள் நிற்பனவாகும்?

[விடை : முறையே 3, 2, 4, 1 இலக்கங்கள்]

4. $\bar{2}\cdot 5821$; $\bar{1}\cdot 5911$; $\bar{6}\cdot 3871$ ஆகியவற்றைத் தத்தம் இலாகிருதங்களாகக் கொண்டுள்ள எண்களில் முதலதாகிய பொருளுடைய (first significant) இலக்கம் நிற்கும் இடத்தைக் குறிப்பிடுக.

5. 19·7ன் இலாகிருதம் 1·2945 ஆம் ·2945, 2·2945, 4·2945 என்பவற்றை இலாகிருதங்களாகப் பெற்ற எண்களைக் கண்டெழுதுக.

6. $\log 2 = \cdot 3010$; $\log 3 = \cdot 4771$; $\log 7 = \cdot 8451$ என்று கொடுத்தன கொண்டு (i) $\log 126$ (ii) $\log 84$ (iii) $\log \frac{125}{42}$ (iv) $\log(\cdot 0625)^{2/3}$ (v) $\log\left(\frac{384}{\cdot 075}\right)$ என்றவற்றின் மதிப்பை அறிக.

7. இலாகிருத அட்டவணையைக் கொண்டு 11ன் கன மூலத்தை மூன்று தசம ஸ்தான சுத்தமாகக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை : 2·224]

8. தீர்வு கண்டு, xன் மதிப்பை 3 தசமஸ்தான சுத்தமாகத் தருக.

(i) $2^{2x+1}\,7^{x+3} = 17^{x+5}$

[விடை : 15·3]

(ii) $3^{2x}\,5^{3x-4} = 7^{x-1}\,11^{2x}$

[விடை : 15·82]

9. தீர்க்க:

(i) $6^x = \frac{10}{3} - 6^{-x}$

(ii) $10^x + 10^{-x} = 25/12$

(iii) $9^x + 20 = 3^{x+2}$

(iv) $9^x - 5\cdot 3^x + 4 = 0$

(v) $10\cdot 2^{3+x} - 4^{5+x} = 16$

10. தீர்க்க:

(i) $2^x = 3^y$; $2^{y+1} = 3^{x-1}$

(ii) $2^x 5^y = 10^{x-y}$; $3^x = 4^{y+2}$

(iii) $3\cdot 2^{x+y+1} = 6^{y+1}$; $3^x = 3\cdot 2^{y+1}$

11. இலாகிருத அட்டவணையைக் கொண்டு மதிப்பறிக:

(i) $\dfrac{(23\cdot 5)^2\,(\cdot 523)^3}{1-(0\cdot 352)^2}$

(ii) $\dfrac{(\cdot 234)^3 + (1\cdot 032)^5}{(\cdot 317)^3 - (\cdot 108)^7}$

(iii) $\dfrac{(23\cdot 34)^2 \times (127\cdot 341)^2}{(6\cdot 12)^5 \times (464\cdot 6)^2}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(12\cdot873)^3}}$

(v) $\dfrac{(527\cdot4)^4}{(393)^5}$

(vi) $\sqrt[3]{3^4\times2^8\times7^7}$

(vii) $\dfrac{(34\cdot74)^{\frac{3}{5}}\times\sqrt[4]{2\cdot538}}{\sqrt[2]{4\cdot396}}$

12. (i) $2^{12}\times3^7$ ன் பெருக்கற்பலனைச் சாதாரண வழியில் எழுதும்பொழுது அதிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அறிக.

(ii) $2^{-5}\times3^{14}$ ஆனது தசம ரூபமாக வரையப்பட்டால், அதன் முதலதாகிய பொருளுடைய இலக்கத்தின் இடநிலையைக் கண்டறிக.

13. $\log 3=\cdot47712$ என்றதைக் கொண்டு, 3^{43} ல் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையையும், 3^{-43}ல் முதலதாகியபொருளுடைய இலக்கத்தின் இடநிலையையும் காண்க.

14. $\left(\dfrac{21}{20}\right)^{300}$ ன் முழு எண்பாகத்தில் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அறிக.

[விடை : 7 இலக்கங்கள்]

15. $y=ab^{-x}$ என்னும் சமன்பாடு

(i) $x=0\cdot2$; $y=316$

(ii) $x=0\cdot4$; $y=120$

என்னும் மதிப்பீடுகளுக்கும் பொருந்துமாயின். a, b க்களின் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக.

[விடை : $a=6\cdot93$; $b=126\cdot6$]

16. x, y என்னும் மாறிகள் $y=ax^n$ என்னும் வடிவில் தொடர்பு கொள்ளுமென்று அறியப்படும். இங்கு a, n என்பன மாறிலிகளாம். $x=19\cdot3$ ஆனால், $y=3870$ ஆகும். மேலும் $x=14\cdot8$ ஆனால், $y=27400$ ஆகும். a, n களின் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடி.

[விடை : $a=824\cdot9$; $n=1\cdot3$]

IV. விகிதமும், விகிதசமமும்

(Ratio and Proportion)

1. வரையறை யிலக்கணம் :

விகிதம், வகுத்தல், பின்னம் என்பன கொள்கையில் ஒத்தனவேயாம். வகுத்தல் குறியாகிய ÷ ல் இடைக்கோடு நீங்கி நின்ற வடிவமே : ஆகும். ஆதலின், $a : b$ ஐ $\frac{a}{b}$ என்று வரைதலும் அமைவும். $\frac{a}{b}$ என்றதனுள் a, b க்கள் முறையே முன்னுறுப்பு, பின்னுறுப்பு எனப்படும்.

இரண்டு விகிதங்களைச் சோத்துப் பெருக்கினால் அவை கலக்கப் பட்டன எனப்படும். $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ன் கலவை விகிதம் $\frac{ac}{bd}$ ஆகும்.

$\frac{a}{b}$ ஆனது தன்னொடு தன்னை இருமுறை, மும்முறை ....கலந்து நின்றால் வரும் $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$,......—முதலாயின முறையே இருபடி (duplicate), முப்படி (triplicate) விகிதங்கள் எனப்படும்.

$\frac{a}{b}$ ல், $a>b$ ஆனால், பெரிய அசம விகித மென்றும், $a=b$ ஆனால் சம விகிதமென்றும், $a<b$ ஆனால் சிறிய அசம விகித மென்றும் கூறப்படும்,

2. விகிதங்களைப் பற்றிய தேற்றங்கள்:

தேற்றம் I

ஒரு விகிதத்தின் உறுப்புக்களோடு ஒரு தன ராசி எண்ணைக் கூட்டினால், சம விகிதத்தின் மதிப்பு மாறாது. பெரிய அசம விகிதத்தின் மதிப்புக் குறையும்; சிறிய அசம விகிதத்தின் மதிப்பு ஏறும்.

$\frac{a}{b}$ என்னும் விகிதத்தின் உறுப்புக்களோடு x என்னுந் தனராசி யெண்ணைக் கூட்ட $\frac{a+x}{b+x}$ எனவரும்.

இனி, $\frac{a+x}{b+a} >=< \frac{a}{b}$ என்பது

$b(a+x) >=< a(b+x)$ என்பதற்கு ஏற்ப நிற்கும்.

(b தன ராசியாகின்)

அஃதாவது $ab+bx >=< ab+ax$,,

,, $bx >=< ax$,,

,, $b >=< a$,,

ஆகவே, $b>a$ ஆனால், அதாவது சிறிய அசம விகிதங் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$ ஆம். இதன் அர்த்தம் அவ்விகிதத்தின் மதிப்பு ஏறிற்று என்பதாம்.

$a=b$ ஆனால், அஃதாவது கொடுத்தது சமவிகிதமானால்,

$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$ ஆம். விகிதத்தின் மதிப்பு மாறவில்லை.

$b>a$ ஆனால், அஃதாவது கொடுத்தது பெரிய அசம விகிதமானால் $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$ ஆம். இதன் அருத்தமாவது விகிதத்தின் மதிப்பு குறைந்த தென்பதாம்.

குறிப்பு: இத்தேற்றத்தையே பின்வருமாறும் கூறலாம்,

ஒரு விகிதத்தின் உறுப்புகளோடு ஒரே தனராசியைக் கூட்டினுல், ஒரு சமவிகிதம் மாறுபடாமலிருக்க, ஒரு அசம விகிதம் 1 க்கு வெகு சமீப மதிப்புடையதாக்கப்படலாம்.

அஃதாவது a, b, x என்னும் அனைத்தும் தனராசியே யாறுல், $\frac{a}{b}, \frac{a+x}{b+x}$ என்னும் விகிதங்களுள் பின்னிற்கும் விகிதம் முன்னிற்பதைவிட 1 க்கு சமீபித்ததாகும்.

தேற்றம் II

ஒரு விகிதத்தின் வுறுப்புக்களுள் சிறியதனுக்கும் குறைந்ததொரு தனராசியை அவ்வுறுப்புக்களிலிருந்து கழித்தால், சமவிகிதம் மாறு படாது; பெரிய அசம விகிதம் ஏறும்; சிறிய அசமவிகிதம் குறையும் என்றறிக.

இப்பொழுது, b யும், $(b-x$ ம்) தனராசியாகில்

$$\frac{a-x}{b-x} >=< \frac{a}{b} \text{ ஆதல்}$$

$b(a-x) >=< a(b-x)$ க்கு ஏற்ப நிற்கும்.

அஃதாவது, $ab-bx >=< ab-ax$,,

,, $-bx >=< -ax$,,

,, $-b >=< -a$,,

,, $b <=> a$,,

ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டதாகும்.

குறிப்பு : இத்தேற்றத்தைப் பின் வருமாறும் கூறலாம்.

ஒரு விகித வுறுப்புக்களுள் சிறியதற்கும் குறைந்தோர் தனராசி யெண்ணை யவ்வுறுப்புக்களிலிருந்து கழிக்க வரும் விகிதம் 1 க்கு அதிக அப்பால் கொண்டு போகப்பட்டதாகும்.

தேற்றம் III

$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$......என்னும் விகிதங்கள் அனைத்தும் சமமாகாதன வாகியும், அவற்றின் பின்னுறுப்புக்களெல்லாம் ஒரே ராசிகளேயாகியும் நின்ருல்,

$\frac{a_1+a_2+a_3\ldots\ldots}{b_1+b_2+b_3\ldots\ldots}$ என்னும் விகிதம் அவற்றுள் பெரியதற்கும், சிறியதற்கும் இடைநிலைப்பட்ட மதிப்புடையதாகும்,

பொதுத் தன்மையை இழக்காமல், பகுதிகளெல்லாம் தனராசிகளாயிருப்பதாகவே நாம் கருதிக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், பகுதிகள் ருண ராசிகளானால், ருண ராசிக்குறி விகுதியோடு கூடி நிற்பதாகக் கொள்ளலாம்.

கொடுக்கப்பட்டவற்றுள் மிகப் பெரிய விகிதம் $\frac{a_r}{b_r}$ g என்க. மிகச் சிறிய விகிதம் $\frac{a_s}{b_s}=l$ என்க.

அப்பொழுது, $g > \frac{a_1}{b_1} > l$;

$$\therefore \quad b_1 g > a_1 > b_1 l$$

b தனராசியாதலின் இது பொருந்தும்.

இவ்வாறே

$$g > \frac{a_2}{b_2} > l \quad \therefore \quad b_2 g > a_2 > b_2 l$$

$$,, \qquad b_3 g > a_3 > b_3 l$$

....

....

$$g = \frac{a_r}{b_r} > l \quad \therefore \quad b_r g = a_r > b_r l$$

....

....

$$g > \frac{a_s}{b_s} = l \quad \therefore \quad b_s g > a_s = b_s l$$

இவற்றைக் கூட்ட,

$g\,(b_1+b_2+b_3\ldots\ldots) > (a_1+a_2+a_3\ldots\ldots) > l(b_1+b_2$ $+b_3+\ldots\ldots)$ என வரும்.

முற்றிலும் $(b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots)$ ஆல் வகுக்க,

$$g > \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots} > l \text{ ஆம்.}$$

கிளை : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b^2}, \frac{a_3}{b_3}$......என்பவற்றின் பின்னுறுப்புக்கள் ஒரே ராசியைச் சார்ந்தனவாகியும், p, q, r என்பன தன ராசிகளாகியும் நின்றால், $\frac{pa_1+qa_2+ra_3+\ldots\ldots}{pb_2+qb_2+rb_3+\ldots\ldots}$ ஆனது அவற்றுள் மிகச் சிறிய விகிதத்திற்கும் மிகப்பெரிய விகிதத்திற்கும் இடைப்பட்டுக் காணப்படும்.

தேற்றம் IV

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ஆனால் அப்பொழுது ஒவ்வொரு விகிதமும், $\sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots\ldots}}$ ஆம். இங்கு $p, q, r\ldots$என்பன பூஜ்யம் நீங்கலாக எம்மதிப்புக்களையும் உடையன வாகலாம்.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ldots=k \text{ என்க.}$$

அப்பொழுது, $a=bk\,;\ c=dk\,;\ e=fk,\ldots\ldots$ என நிற்கும்.

$$\therefore \sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots\ldots}}=\sqrt[n]{\frac{pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nkn+h\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots\ldots\ldots\ldots}}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{k^n(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots\ldots}{(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots\ldots}}=\sqrt[n]{k^n}=k$$

=கொடுத்த ஒவ்வொரு விகிதத்திற்கும் சமமாகும்.

கிளை 1.

$n=1$ ஆனால்,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ldots=\frac{pa+qc+re+\ldots\ldots}{pb+qd+rf+\ldots\ldots}$$

கிளை 2.

$n=1$ ம், $p=q=r=\ldots\ldots=1$ ம் ஆனால்,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ldots=\frac{a+c+e+\ldots\ldots}{b+d+f+\ldots\ldots}$$

$$=\frac{\text{எல்லாத்தொகுதிகளின் கூட்டுப்பலன்}}{\text{எல்லாப் பகுதிகளின் கூட்டுப்பலன்}} \text{ ஆம்.}$$

3. விகித சமம் (Proportion)

இரண்டு விகிதங்கள் சமமானல், அவற்றின் நான்கு உறுப்புக்களும் விகித சமத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும்.

$a : b = c : d$ ஆனல், a, b, c, d க்கள் விகிதசமத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும். இற்றுள், d நான்காம் உறுப்பாகவும், a, d க்கள் முனையுறுப்புக்களாகவும், b, c க்கள் இடையுறுப்புக்களாகவும் வழங்கும்.

a, c யும், b, d யும் வைப்பொத்த (homologous) வுறுப்புக்களெனப்படும்.

ஒரு விகிதசமத்தில், முனையுறுப்புக்களின் பெருக்கற்பலன் இடையுறுப்புக்களின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகும். அதாவது $ad = ba$.

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ஆனல். a, b, c க்கள் தொடர் விகிதசமத்தில் (Continued proportion) இருப்பதாகக் கூறப்படும். b ஆனது a க்கும், c க்கும் தொடர் விகிதசம இடைஉறுப்பு (mean proportional) எனப்படும். c ஆனது a க்கும், b க்கும் தொடர் விகிதசம மூன்றும் உறுப்பெனப் படும் (Third proportional).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots\ldots$ ஆனல், $a, b, c, d, e, f\ldots\ldots\ldots$ என்பன விகிதசமத்தில் உள்ளன வாகும்.

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots\ldots\ldots$ ஆனல், $a, b, c\ d, \ldots\ldots\ldots$ ஆவன தொடர் விகிதசமத்தில் இருப்பனவாகும். அப்பொழுது,

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}\ ;\ \frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}\ ;\ \frac{a}{e} = \frac{a^4}{b^4} \ldots\ldots\ldots \text{ என அமையும்.}$$

4. விகிதசமத்தின் தன்மைகள் ;

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ஆனல், அப்பொழுது $ad = bc$ ஆம் ; மறுதலையும் அமையும்.

(ii) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ஆனால். $b^2 = ac$ ஆம் ; மறுதலேயும் அமையும்

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ஆனால்,

(iii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (இஃது ஒன்று விட்ட விகிதசமமாம்; Alternando)

(iv) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (இது தலேகிழ் விகிதசமமாம் ; Invertendo)

(v) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (இதுகூட்டு விகிதசமமாம்; Componendo.)

இஃது ஒவ்வொரு விகிதத்தோடும் 1 கூட்ட வருவது ஆகும்.

(vi) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (இது கழிவிகிதசமமாம் : dividendo)

இஃது ஒவ்வொரு விகிதத்திலிருந்து 1 கழிக்க வருவது ஆகும்

(vii) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c+d}$ (இது கூட்டுக்கழி விகிதசமமாம் ; Componendo et dividendo)

இது (v) ஐ (vi) ஆல் வகுக்க வருவது ஆகும்

5. விளக்க மாதிரிகள் :

(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ஆனால், $\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{(a+c+e)^3}{(e+d+f)^2}$ என்றுநிரூபி.

கொடுத்த ஒவ்வொரு விகிதமும் k க்குச் சமமெனக் கொள்ள

$a=bk$; $c=dk$; $e=fk$ என வரும்.

இம்மதிப்புக்களே இடப்பக்கத்தில் பிரதியிட

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{d^3k^3}{d^2}+\frac{f^3k^3}{f^2}=bk^3+dk^3+fk^3$$

$$=k^3(b+d+f)$$ ஆகும்.

இம்மதிப்புக்களே வலப்பக்கத்தில் பிரதியிட,

$$\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}=\frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2}=\frac{[k(b+d+f)]^3}{(b+d+f)^2}=k^3(b+d+f)$$

ஆகவே, இடப்பக்கம்=வலப்பக்கமாம்.

(2) $a, b, c,$ என்பன தொடர் விகிதசமத்திலிருந்தால், $ab+bc$ ஆனது a^2+b^2 க்கும், b^2+c^2 க்கும் தொடர் விகிதசம இடையுறுப் பாகுமென நிருபி.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இதைக்கொண்டு $\frac{a^2+b^2}{ab+bc}=\frac{ab+bc}{b^2+c^2}$ என நிருபிக்கவேண்டும்.

வழி 1.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ஆனால், ஒவ்வொன்றும் $\frac{pa+qb}{pb+qc}$ க்குச் சமமாகும்,

$p=a$, $q=b$ என்று பிரதியிட்டால்,

ஒவ்வொரு விகிதமும் $\frac{a^2+b^2}{ab+bc}$ க்குச் சமமாகும்.

மறுபடியும், $p=b$, $q=c$ என்று பிரதியிட்டால்

ஒவ்வொரு விகிதமும் $\frac{ba+cb}{b\,.\,c+c\,.\,c}=\frac{ab+bc}{b^2+c^2}$ ஆகும்.

$$\therefore \qquad \frac{a^2+b^2}{ab+bc}=\frac{ab+bc}{b^2+c^2} \text{ ஆம்}$$

வழி II

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k,$ என்க.

அப்பொழுது, $b=kc$; $a=kb=k\cdot kc=k^2c.$

இம்மதிப்புக்களை $\frac{a^2+b^2}{ab+bc}$ ல் பிரதியிட,

$$\text{இடப்பக்கம்}=\frac{(k^2c)^2+(kc)^2}{(k^2c)(kc)+kc(c)}=\frac{k^4c^2+k^2c^2}{k^3c^2+kc^2}=\frac{k^2c^2(k^2+1)}{kc^2(k^2+1)}=k.$$

ஆகும்.

அம்மதிப்புக்களையே $\frac{ab+bc}{b^2+c^2}$ யிலும் பிரதியிட,

$$\text{வலப் பக்கம்}=\frac{(k^2c)(kc)+kc(c)}{kc^2+c^2}=\frac{k^3c^2+kc^2}{kc^2+c^2}=\frac{kc^2(k+1)}{c^2(k+1)}=k.$$

ஆகும்.

பயிற்சி 4

1. $3x^2-8xy+4y^2=0$ ஆனல், $x:y$ என்னும் விகிதத்தைக்காண்க.

[விடை 2 : 3 அல்லது 2 : 1]

2. $a:b=c:d$ ஆனல்,

$$a-b:c-d=\sqrt{a^2+ab+b^2}:\sqrt{c^2+cd+d^2}$$ என நிரூபி.

3. a, b, c, d விகித சமமானல், $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2$ எனக் காட்டுக.

4. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ஆனல், $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ என்று நிரூபி.

5. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ஆனல், $a-\dfrac{(a-b)(a-c)}{a}=b+c-d$ எனக் காண்பி.

6. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ஆனல், $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ என நிரூபி.

பொதுவாக $\Sigma\dfrac{x^n}{a^{n-1}}=\dfrac{(\Sigma x)^n}{(\Sigma a)^{n-1}}$ எனக் காண்பி.

7. $\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2}=\dfrac{z}{c^2}$ ஆனல், $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^2}{a^2+b^2+c^2}$ எனக் காண்பி.

8. $\dfrac{x}{a^3}=\dfrac{y}{b^3}=\dfrac{z}{c^3}$ என்றல், $\dfrac{x^2}{a^3}+\dfrac{y^2}{b^3}+\dfrac{z^2}{c^3}=\dfrac{(x+y+z)^2}{a^3+b^3+c^3}$ எனக்காட்டுக

9. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ஆனல், $\dfrac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\dfrac{y^2+z^2}{b^2+c^2}=\dfrac{z^2+x^2}{c^2+a^2}$ என்று நிரூபி.

10. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ஆனல், ஒவ்வொரு விகிதமும்

$$\sqrt{\frac{yz+zx+xy}{bc+ca+ab}}$$ க்குச் சமமாகும் எனக் காட்டுக.

11. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ஆனல், $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}+\sqrt{ef}$

$$=<\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}$$ என்று நிரூபிக்க.

12. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ ஆனல், $\dfrac{x}{b+c-a}+\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ எனக் காட்டுக.

13. $\dfrac{y+z-x}{a}=\dfrac{z+x-y}{b}=\dfrac{x+y-z}{c}$ ஆனால்,

$\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{c+b}$ என நிரூபி.

14. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ எனின்,

(i) $\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$ என்று காட்டுக.

(ii) $\dfrac{a-b}{x^2-y^2}=\dfrac{b-c}{y^2-z^2}=\dfrac{c-a}{z^2-x^2}$ என நிரூபி.

15. $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ ஆனால்,

$\dfrac{x(y-z)}{b^2-c^2}=\dfrac{y(z-x)}{c^2-a^2}=\dfrac{z(x-y)}{a^2-b^2}$ என நிரூபி.

16. $\dfrac{2y+2z-x}{a}=\dfrac{2z+2x-y}{y}=\dfrac{2x+2y-z}{c}$ ஆனால்,

$\dfrac{x}{2b+2c-a}=\dfrac{y}{2c+2a-b}=\dfrac{z}{2a+2b-c}$ என்று காட்டுக.

17. $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(az+by-cz)$ ஆனால்,

$\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ என்று நிரூபி.

18. $\dfrac{a^2-bc}{l}=\dfrac{b^2-ca}{m}=\dfrac{c^2-ab}{n}$ என்று கொடுக்கப்பட்டதைக் கொண்டு, பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $\dfrac{l^2-mn}{a}=\dfrac{m^2-nl}{b}=\dfrac{n^2-lm}{l}$

(ii) $(a+b+c)(l+m+n)=al+bm+cn.$

19. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ஆனால்,

(i) $\dfrac{\Sigma a^{2n}}{\Sigma a^{-2n}}=(abcd)^n$ என்றும்

(ii) $\dfrac{\Sigma a^n}{\Sigma a^{-n}}=(ad)^n=(bc)^n$ என்றும் நிரூபிக்க.

20. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ஆனால், ஒவ்வொரு விகிதமும் $\left(\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ க்குச் சமம் எனக் காட்டுக.

21. $\frac{a^3}{x^2}=\frac{b^3}{y^2}=\frac{c^3}{z^2}=x+y+z$ எனின், ஒவ்வொரு விகிதமும் $(a^{3/2}+b^{3/2}+c^{3/2})^{2/3}$ என்று நிரூபிகக.

22. $\frac{a^{n+1}}{x^n}=\frac{b^{n+1}}{y^n}=\frac{c^{n+1}}{z^n}=x+y+z$ எனின், இவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் $\left(a^{\frac{n+1}{n}}+b^{\frac{n+1}{n}}+c^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ என்று நிரூபி.

23. $\frac{bz-cz}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$ ஆனால், ஒவ்வொன்றும் $\frac{ay-bx}{a-b}$ க்குச் சமமென்று காட்டுக.

24. $\frac{xyz}{y+z}-x^2=\frac{xyz}{z+x}-y^2$ ஆனால், ஒவ்வொன்றும் $\frac{xyz}{x+y}-z^2$ க்குச் சமமாகுமென்று காட்டுக. [x, y, z அசமம் என்று கொள்க]

25. x, y, z அசமம் ஆகுங்கால், $\frac{yz-x^2}{y+z}=\frac{3x-y^2}{3+x}$ ஆனால், ஒவ்வொன்றும் $\frac{xy-z^2}{x+y}=x+y+z$ என்று காட்டுக.

26. $\frac{y^2+z^2}{a}=\frac{z^2+x^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{c}=xyz$ எனின், x, y, z களின் மதிப்பைக் கண்டறிக.

27. $\frac{bz+cy}{b-c}=\frac{cx+az}{c-a}=\frac{ay+bx}{a-b}$ எனின், $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$ என்று நிரூபிக்க.

28. $\frac{cy+bz}{a}=\frac{az+cx}{b}=\frac{bx+ay}{c}$ ஆனால்,

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$ என்று நிரூபி.

29. $(a+b+c+d)\ (a-b-c+d)=(a-b+c-b)\ (a+b-c-d)$ ஆனால், a, b, c, d என்பன விகிதசமத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

30. விகிதசமத்திலுள்ள நான்கு பரிமாணங்களுள் மிகப் பெரியதும், மிகச் சிறியதும் ஆகியவை இரண்டும் தொகை கூடின் மற்றையிரண்டின் கூட்டுப் பலனுக்கு அதிகப்பட்டு நிற்குமெனக் காட்டுக.

31. a, b, c, d என்பன தொடர் விகிதசமத்தில் நிற்பனவானால்,

(i) b^3+c^3 ஆனது a^3+b^3க்கும், c^3+d^3க்கும் தொடர் விகித சம இடையுறுப்பு (mean proportional) என நிறுபி.

மேலும் கீழ்வருவன உண்மை என்று காட்டுக :

(ii) $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2$

(iii) $(a^2+b^2+v^2)\ (b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

(iv) $\sqrt{ab}-\sqrt{bc}+\sqrt{cd}=\sqrt{(a-b+c)(b-c+d)}$

(v) $a+d=b+c+\dfrac{(a-b)(a-e)}{a}$

(vi) $a+b : b+c=a^2(b-c) : b^2(a-b)$

32. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ ஆனால், $(a+b)$க்கும், $(b+c)$க்கும் $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}$ ஆனது தொடர்விகித சம இடையுறுப்பு என நிறுபி.

33. நான்கு பரிமாணங்கள் தொடர் விகிதசமத்தில் உள்ளன. முதலாவது நான்காவது உறுப்புகளின் வித்தியாசம், மற்ற இரண்டின் வித்தியாசத்திற்குக் குறைந்த பக்ஷம் மூன்று மடங்காவது பெரியதாக இருக்கவேண்டுமென்று நிருபிக்க.

34. $m=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}$ எனின், $\dfrac{1+m^2}{2m}=\dfrac{x^2}{y^2}$ என்று காட்டுக.

35. $\sqrt{11}-\sqrt{5}$க்கும், $13\sqrt{11}+19\sqrt{5}$க்கும் தொடர் விகித சம இடையுறுப்பாவதனை $\sqrt{a}+\sqrt{5}$ என்னும் வடிவில் காண்க :

[விடை : $\sqrt{33}+\sqrt{15}$]

36. தீர்வு காண்க :

(i) $$\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-16}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-16}}=2\tfrac{1}{3}$$

[விடை : $x=20$]

(ii) $$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}=\tfrac{1}{3}$$

[விடை : $x=5$]

(iii) $$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{3x+5}{2x}$$

[விடை : 1, $\frac{5}{3}$ அல்லது $-\frac{5}{4}$]

(iv) $$\frac{(x+a)^{1/5}+(x-a)^{1/5}}{(x+a)^{1/5}-(x-a)^{1/5}}+\frac{(x+a)^{1/5}-(x-a)^{1/5}}{(x+a)^{1/5}+(x-a)^{1/5}}=b$$

[விடை : $x=a\left[\frac{(b+2)^{5/2}+(b-2)^{5/2}}{(b+2)^{5/2}+(b-2)^{5/2}}\right]$

37. (i) $\frac{x+v}{2a-b}=\frac{y+z}{2b-c}=\frac{z+x}{2c-a}$ என்றால்,

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+{}^2}$ என்று நிரூபி.

(ii) $\frac{x}{a^3(b-c)}=\frac{y}{b^3(c-a)}=\frac{z}{c^3(a-b)}$ ஆனால்,

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$ என்று காட்டுக.

38. $a:b$ என்ற விகிதம், $a-c:b-c$ன் இருபடி விகிதத்திற்குச் சமமானால், c ஆனது a க்கும், b க்கும் தொடர் விகிதசம இடை உறுப்பு எனக் காட்டுக.

39. $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ ஆனால், ஒவ்வொரு பின்னமும் $\frac{1}{2}$ அல்லது -1க்குச் சமமாகும் என நிரூபி.

40. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>\frac{e}{f}$ என்றால், $\frac{e}{f}<\sqrt{\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}}<\frac{a}{b}$ எனக் காட்டுக.

V. இருபடிச் சமன்பாடுகளின் கொள்கை
(Theory of Quadratic Equations)

1. இரண்டாவது படி பெற்ற மாறியைக் கொண்டுள்ள சமன்பாடானது இருபடிச் சமன்பாடு எனப்படும். ஒவ்வொரு இருபடிச் சமன்பாடும் தக்க ஒடுக்க (Reduction) உருவமாற்றங் (Transformation) களுக்குப்பின் $ax^2bx+c=0$ என்னும் நியமரூபத்தில் அமைத்தற்காகும். இங்கு x ஒரு மாறியும், a, b, c க்கள் மாறிலிகளுமாம்.

b, c க்களின் குணிதங்கள் தனியாகவோ, அல்லது இரண்டும் சேர்ந்தோ கழிந்து போகலாம்: எல்லைச் சந்தர்ப்பம் (Limiting case) ஆகுங் காலத்தில் அல்லாது $a=0$ என்று நாம் கருதிக் கொள்ளுதலாகாது.

வெளிப்படையான மதிப்புப்பெறுத சங்கேதமானது ஒரு சமன் பாட்டுக்கு ஒத்து நிற்குமானல், அச் சங்கேதத்தின் மதிப்பே அச்சமன் பாட்டிற்கு மூலம் எனப்படும். α என்பது $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலமானல், $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ என்றும் நாம் அவசியம் பெற்றுக வேண்டும்.

2. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டினைத் தீர்வு செய்து, அது இரண்டே இரண்டு மூலங்களைத்தான் பெறக் கூடுமென்று காட்டுக.

$$ax^2+bx+c=0$$

அஃதாவது, $a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)=0$

,, $a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=0$

$$,, \quad a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$$

$$,, \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$

$$,, \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0$$

$$,, \quad a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$,, \quad a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0)$$

$$,, \quad a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

இங்கு $\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ம், $\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ம்

ஆகுமெனின் $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ஆம்,

இப்பொழுது, $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ன் பெருக்கற்பலன் பூஜ்ஜியம் ஆதலின், இக்காரணிகளுள் யாதேனும் ஒன்று 0 ஆதல் வேண்டும், a ன் மதிப்பு 0 ஆதல் பற்றுது. அங்ஙனமாயின், இருபடியேற்கும் உறுப்புக்கு இடமேயில்லாமற் போகும். அப்பொழுது இருபடிக்கோவை யாதல் யாங்ஙனம் அமையும்? இனி, காரணிகளுள் ஏதாவது ஒன்றேனும் 0 ஆக வேண்டுங்கால், x ன் மதிப்பாக α, β க்களே அமைதற்குப் பொருந்துவனவாம். இவையொழிந்து எய்தும் வேறெந்த மதிப்பினுலும் $(x-\alpha)$ அல்லது $(x-\beta)$ பூஜ்ஜயமாக முடியாது ஆதலால், ஒரு இருபடிச் சமன்பாடானது எவ்வகையாலும் இரண்டல்லது அவற்றிற்கு மேற்பட்ட மூலங்களை ஏற்று நிற்றல் இயலாது என்பது துணியப்படும்.

குறிப்பு (i): மேற்காட்டிய செய்முறையில் நாம் ஒரே சமயத்தில் (a) இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு கண்டோம் (b) அஃது இரண்டே இரண்டு மூலங்களைத்தான் பெறக்கடவதாகும் என்று காட்டினேம் (c) ax^2+bx+c என்னுங் கோவையைக் காரணிப்படுத்தி, அதனேடு

ஒப்புடைத்தாய சமன்பாட்டிற்குரிய α, β என்னும் மூலங்களைக் கொண்டு $a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்னும் வடிவிலும் அமைத்தோம்.

குறிப்பு (ii) $ax^2+bx+c=0$ என்றதனுள் x ஆகிய மாறு இராசிக்கு இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மதிப்புக்களும் பொருந்த வருமாயின், அப்பொழுது $a=b=c=0$ ஆகும். அந்நிலைமைக்கண் அச் சமன்பாடு ஒரு சருவ சமன்பாடாக முடியும். அப்பொழுது முடிவுடைய யாதொரு மதிப்பை (Finite value) யும் x ஏற்று நிற்றற்பாலதாகும்.

***வேறுவழி :**

$$ax^2+bx+c=0$$

இச் சமன்பாட்டை $4a$ ஆனல் பெருக்க

$$4a^2x^2+abx+4ac=0 \qquad \text{ஆம்}$$

அஃதாவது, $4a^2x^2+4abx=-4ac$,,

,, $(2ax)^2+2\,.\,(2ax)\,.\,b=-4ac$,,

இருபக்கங்களிலும் b^2 ஐச் சேர்க்க ,,

$$(2ax)^2+2\,.\,(2ax)b+b^2=b^2-4ac \qquad ,,$$

அஃதாவது, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$,,

$$\therefore \quad 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \qquad ,,$$

$$\therefore \quad 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

இதனல், x ன் இரண்டு மதிப்புக்கள்

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ என்பனவாம்.

இம் மதிப்புக்கள் அல்லது மூலங்கள் α ம் β ம் எனக் குறிக்கப் படுவன வாகுக.

---

* இந்த முறை இந்திய கணிதப் பேராசிரியர் ஸ்ரீ தராச்சாரியாரால் தரப்பட்டதாகும்.

சாத்தியமானுல் α, β களுக்கு வேறதாகியும், இச்சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துவதாகியும் நிற்கும் γ என்பதோர் மூலமும் உண்டென்று கொள்ளுவோம். அப்பொழுது,

கொடுத்த சமன்பாட்டிற்கு	α ஒரு	மூலமாதலின்	$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ (1)
,,	β	,,	$a\beta^2+b\beta+c=0$ (2)
,,	γ	,,	$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ (3)

(1) இருந்து (2) ஐக் கழிக்க. $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$ ஆம்

$(\alpha-\beta)$ ன் மதிப்பு 0 ஆகாமையின், அதனுல் வகுக்க $a(\alpha+\beta)+b=0$ ஆம் (4)

(2) இருந்து (3) ஐக் கழிக்க $a(\beta^2-\gamma^2)+b(\beta-\gamma)=0$ ஆம்.

$(\beta-\gamma)$ ன் மதிப்பு 0 ஆகாமையின், அதனுல் வகுக்க. $a(\beta+\gamma)+b=0$ ஆம் (5)

இனி, (4) இருந்து (5) ஐக் கழிக்க, $a(\alpha-\gamma)=0$ ஆம்.

$\therefore \quad \alpha-\gamma=0$ ஆம்.

$\therefore \quad \alpha=\gamma$ ஆம்.

அஃதாவது, மூன்றுவதாகக் கருதிக்கொண்ட மூலமானது ஏற்கெனவே கண்டுபிடித்த மூலங்கள் இரண்டனுள் யாதேனுமொன்றனுக்குச் சமமாகவே இருக்கவேண்டும் என்னும் நிலைமை வந்தெய்துவதாயிற்று.

ஆகவே, ஒரு இருபடிச் சமன்பாடானது நிச்சயமாக இரண்டே இரண்டு மூலங்களைத்தான் பெறக்கூடும் என்பது வலியுறும்.

3. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் குணிதங்களுக்கும் மூலங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு

$ax^2+ba+c=0$ ன் மூலங்கள் $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்றதனுல் கொடுக்கப்படும்,

$\alpha=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்றும், $\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்றுங் கொள்க.

இப்பொழுது $\alpha+\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}b-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$\therefore$ மூலங்களின் கூட்டுப்பலன் $=\frac{-b}{a}=-\frac{x \text{ ன் குணிதம்}}{x^2 \text{ ன்குணிதம்}}$.

மேல், $\alpha\beta=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$$=\frac{(-b^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$\therefore$ மூலங்களின் பெருக்கற் பலன் $=\frac{c}{d}=\frac{\text{தனியுறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் குணிதம்}}$

4. m, n களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டை அமைத்தல் : (இது மறுதலைத் தேற்றமாகும்)

இருபடிச் சமன்பாட்டின் அமைப்புக்குரிய சங்கேதம் x எனக் கொள்க:

x ன் ஒரு மதிப்பு$=m$ ஆதலின், $x-m=0$

,, மற்றொரு ,, $=n$, ஆதலின், $x-n=0$

x ஆனது m அல்லது n என்னும் மதிப்பைப் பெறுமாயின், $x-m=0$ அல்லது $x-n=0$ ஆகும்.

$\therefore \quad (x-m)(x-n)=0$

அதாவது $x^2-(m+n)x+mn=0$.

ஆகவே, கொடுத்த மூலங்களைக்கொண்ட சமன்பாடு

x^2-(மூலங்களின் கூட்டுப்பலன்)$x+$மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்$=0$ ஆம்.

5. a, b, c க்கள் விகித (Rational) எண்களாகுங்கால் $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்களின் தன்மைவேறுபாடுகளை ஆராய்தல் :

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்பனவாதலின், பின்வரும் வகைகள் எழுகின்றன.

(i) b^2-4ac ஒரு ருணராசிப்பரிமாணமானுல், $\sqrt{b^2-4ac}$ கற்பனை (Imaginary) யாம். அது பற்றி மூலங்களும் கற்பனைகளாம்.

(ii) $b^2-4ac \ngtr 0$ ஆனுல், $\sqrt{b^2-4ac}$ யும் நிச (Real) மதிப்புடையதாகும். அதுபற்றி மூலங்களும் நிசப்பரிமாணங்களாகும் ;

(iii) $b^2-4ac=0$ ஆனுல், $\sqrt{b^2-4ac}$ மறைந்து போதலின், மூலங்கள் நிசமாய், சமமாய், தனித்தனியே $-\dfrac{b}{2a}$ மதிப்புக் கொள்ளும் ;

(iv) $b^2-4ac>0$ ஆனுல், $\sqrt{b^2-4ac}$ ஓர் நிச ராசிப்பரிமாணமாகும். அது பற்றி மூலங்கள் நிசமாகியும், அசமமாகியும் நிற்கும் ;

(v) $b^2-4ac>0$ ஆகிய விடத்து, ஒரு முழுவர்க்கமுமானுல், $\sqrt{b^2-4ac}$ ஆனது நிச விகிதப் பரிமாணமாகும். அது பற்றி மூலங்களும் நிச, அசம, விகிதப்பரிமாணங்களாய் அமையும் ;

(vi) $b^2-4ac>0$ ஆகிய விடத்தும், ஒரு முழுவர்க்கமாகாதாயின், $\sqrt{b^2-4ac}$ ஆனது நிசமானுலும் விகிதமுரு இராசியாகும். அது பற்றி மூலங்களும் நிசமும், அசமும், விகிதமுருதனவு மாகும்.

குறிப்பு : (i) இங்ஙனம் $ax^2+bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மைகளைப் பகுத்தறிதற்கு (b^2-4ac) என்பது நெறிகாட்டியாய் நிற்றலால் அது தன்மை காட்டி (Discriminant) அல்லது நிர்ணய ராசி எனப்படும்.

6. $ax^2+2bxy+by^2+2gx+2fy+c$ **என்னும் கோவையானது x, y க்களைக் கொண்ட இரண்டு விகிதக் காரணிகளாகப் பகுபடுதற்கு அவசியமானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையாவது** $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ **ஆகும்.**

கொடுத்த கோவையின் உறுப்புக்களை xன் அடுக்கு நோக்கி இறங்கு வரிசையில் x ன் ஒரு படிக் கோவையாக அமைத்தால்,

$ax^2+2(hy+g)x+by^2+2fy+c$ என நிற்கும்.

இதன் தன்மைகாட்டி (Discriminant) யானது ஒரு தனிராசியான முழுவர்க்கமானால், இதனை இரண்டு விகிதக் காரணிகளாகப் பகுக்கலாம்.

அஃதாவது, $4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)$ ஒரு முழுவர்க்கமானால்

,, $4\{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)\}$,,

அது சாத்தியமாகும்.

இனி, இக்கோவை யொரு முழுவர்க்கமாக வேண்டுமானால், இதன் தன்மை காட்டியானது 0 மதிப்பெய்தி மறைந்து போகவேண்டும்.

அஃதாவது, $4(gh-af)^2-4(h^2-ab)(g^2-ac)=0$

,, $a(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0$

,, $a\neq 0$ ஆனால், $abc+2fgh-af^2+bg^2-ch^2=0$ ஆகும் பொழுதாகும். இதுவே, பெறவேண்டிய நிபந்தனையாம்.

குறிப்பு: எனினும், $a=0$ ஆனால, கொடுத்த கோவையை y ன் இருபடிக் கோவையாக்கி $2fgh-bg^2-ch^2=0$ என்னும் நிபந்தனையைப் பெறலாம். இஃது $b\neq 0$ ஆனால் அமையும். மேலும், aயும் bயும் பூச்சியமானால், கொடுத்த கோவையானது $2hxy+2gx+2fg+c$ அல்லது $2x(hy+g)+(2fy+c)$ யாக ஒடுக்கமுறும். இக்கோவையானது காரணிகளாகப் பகுபடுதற்கு $hy+g$ ஆனது $2fy+c$ ன் பெருக்கம், அல்லது மடங்காதல் வேண்டும். ஆகையால் $\dfrac{h}{2f}=\dfrac{g}{c}$ ஆம். அஃதாவது, $2fg-ch=0$: அல்லது, $2fgh-ch^2=0$ ஆம். இதே நிபந்தனையானது $a=b=0$ ஆம் பொழுது $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ல் இருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

a, b க்கள் இரண்டும் 0 ஆகுங்கால், h ம் 0 ஆகுமானல், கொடுத்த சமன்பாடானது இருபடிச் சமன்பாடாகாது போகும்.

ஆகவே, ($a=h=b=0$ தவிர) a, h, b க்களின் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ என்னும் இருபடிப் பொதுக் கோவையானது $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ என்னும் நிபந்தனைக்கு அடங்குமானல், இரண்டு வரிக்காரணி (Linear factorr) களாகப் பகுபடும் என்பது தெளிவுறும்.

7. $ax^2+bx+c=0$ ம் $a'x^2+b'x+c'=0$ ம் ஒரு பொதுக் காரணியைக் கொள்ளுதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையையும், அதனேடு அப்பொதுக் காரணியையும் காணுதல் :

பொதுக் காரணி α என்க.

அப்பொழுது, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ உம்

$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$ ஆம்.

இங்கு, α^2, α என்பனவற்றை மதிப்பு விளங்காத வெவ்வேறு சங்கேதங்களாகவும், இச் சமன்பாடுகளை α^2, α களைக் கொண்டமைந்த ஏககால ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகவும் கருதிக்கொண்டு, மாறிப் பெருக்கல் விதியால் $\dfrac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\dfrac{\alpha}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}$ என்பதனைப் பெறுகின்ருேம்.

இச்சமப்பின்னங்களுள் எவையேனும் இரண்டனைப் பெருக்கினல் மூன்ருவதன் வர்க்கங் கிடைக்கும். α ஐ விலக்குவதற்காக

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}\times\frac{1}{ab'-a'b}=\left(\frac{\alpha}{ca'-c'a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{(ca'-c'a)^2}$$ என்றெழுதலாம்.

தொகுதியிலுள்ள α^2 ஐ இருபக்கங்களிலும் நீக்கினல்,

$(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$ என்னும் நிபந்தனை வரும்.

இரண்டு ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் ஒரு பொதுக்காரணி பெறுதற்கு இதுவே வேண்டப்படும் நிபந்தனையாகும்.

(3) ல் இருந்து அப்பொதுக்காரணி $\dfrac{ca'-c'a}{ab'-ab'}$, அல்லது $\dfrac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$ மதிப்புடையதாதல் பெறப்படும்.

சாத்தியமானுல் α, β களுக்கு வேறுதாகியும், இச்சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துவதாகியும் நிற்கும் γ என்பதோர் மூலமும் உண்டென்று கொள்ளுவோம். அப்பொழுது,

கொடுத்த சமன்பாட்டிற்கு α ஒரு மூலமாதலின் $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ (1)

„ β „ $a\beta^2+b\beta+c=0$ (2)

„ γ „ $a\gamma^2+b\gamma+c=0$ (3)

(1) இருந்து (2) ஐக் கழிக்க. $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$ ஆம்

$(\alpha-\beta)$ ன் மதிப்பு 0 ஆகாமையின், அதனுல் வகுக்க $a(\alpha+\beta)+b=0$ ஆம் (4)

(2) இருந்து (3) ஐக் கழிக்க $a(\beta^2-\gamma^2)+b(\beta-\gamma)=0$ ஆம்.

$(\beta-\gamma)$ ன் மதிப்பு 0 ஆகாமையின், அதனுல் வகுக்க. $a(\beta+\gamma)+b=0$ ஆம் (5)

இனி, (4) இருந்து (5) ஐக் கழிக்க, $a(\alpha-\gamma)=0$ ஆம்.

$\therefore \quad \alpha-\gamma=0$ ஆம்.

$\therefore \quad \alpha=\gamma$ ஆம்.

அஃதாவது, மூன்ருவதாகக் கருதிக்கொண்ட மூலமானது ஏற்கெனவே கண்டுபிடித்த மூலங்கள் இரண்டனுள் யாதேனு மொன்றனுக்குச் சமமாகவே இருக்கவேண்டும் என்னும் நிலைமை வந்தெய்துவதாயிற்று.

ஆகவே, ஒரு இருபடிச் சமன்பாடானது நிச்சயமாக இரண்டே இரண்டு மூலங்களைத்தான் பெறக்கூடும் என்பது வலியுறும்.

3. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் குணிதங்களுக்கும் மூலங் களுக்கும் உள்ள தொடர்பு

$ax^2+ba+c=0$ ன் மூலங்கள் $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்றதனுல்

கொடுக்கப்படும்,

$$\therefore \quad -\frac{b}{a} = -\frac{b}{a}; \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

இத்தொடர்பினால்

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ என்னும் நிபந்தனை கிடைக்கப் பெறு கின்றோம்.

9. விளக்க உதாரணங்கள் :

1. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங் களாகில், (i) $\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}$ (ii) $(b\alpha+c)^{-1}+(b\beta+c)^{-1}$ ன் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக :

(i) $$\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} = \frac{\beta^3-\alpha^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\beta-\alpha)^3+3\alpha\beta(\beta-\alpha)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)\,[(\beta-\alpha)^2+3\alpha\beta]}{(\alpha\beta)^3}$$

இப்பொழுது, $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ஆதலின்,

$$(\beta-\alpha)^2 = (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2-4ac}{a^2}$$

$$\therefore \ (\beta-\alpha) = \frac{\mp\sqrt{b^2-4a_c}}{a}$$

இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிட

$$\frac{(\beta-\alpha)[(\beta-\alpha)^2+3\alpha\beta]}{(\alpha\beta)^3}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{b^2 4ac}}{a} \quad \frac{\left[\frac{b^2-4ac}{a^2}+3\cdot\frac{c}{a}\right]}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}$$

$$= \pm\sqrt{b^2-4ac}\left(\frac{b^2-ac}{c^3}\right)$$

(ii) $$(\beta\alpha+c)^{-1}+(\alpha\beta+c)^{-1}=\frac{1}{b\alpha+c}+\frac{1}{b\beta+c}$$

$$=\frac{b(\alpha+\beta)+2c}{b^2\alpha\beta+bc(\alpha+\beta)+c^2}$$

$$=\frac{b\left(\frac{-b}{a}\right)+2c}{b^2\left(\frac{c}{a}\right)+bc\left(\frac{b-}{a}\right)+c^2}$$

$$=\frac{2ac-b^2}{ac^2}$$

2. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாமெனின், $\alpha+\beta^{-1}$, $\beta+\alpha^{-1}$ என்னும் மூலங்களைக் கொள்ளும் சமன்பாட்டினை அமைக்க.

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$; $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ என அறிவோம்.

பெறவேண்டிய சமன்பாட்டிற்குரிய மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$=\alpha+\beta^{-1}+\beta+\alpha^{-1}=\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}$$

$$=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$=-\frac{b}{a}+\left(\frac{-b}{a}\right)\Big/\frac{c}{a}=\frac{-b}{a}-\frac{b}{c}=-\frac{b(a+c)}{ac}$$

அம்மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்

$$=(\alpha+\beta^{-1})(\beta+\alpha^{-1})=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2$$

$$=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+2=\frac{(a+c)^2}{ac}$$

இனிப் பெறவேண்டிய சமன்பாடு

$=x^2-$(மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை)$x+$மூலங்களின் பெருக்கற் பலன்$=0$.

அஃதாவது, $x^2-\left(\frac{-b-(a+c)}{ac}\right)x+\frac{(a+c)^2}{ac}=0.$

,, $\underline{acx^2+b(a+c)+(a+c)^2=0.}$

(3) $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் வர்க்கமாதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையை அறிக.

அச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, α^2 எனக் கொண்டால், ஒரு மூலம் பிறிதாகிய மூலத்திக்கு வர்க்கமாதல் அமையும்.

பிறகு, $\alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}$ (i)

$\alpha\cdot\alpha^2=+\frac{c}{a}$ அஃதாவது $\alpha^3=\frac{c}{a}$ (ii)

என வரும்.

(i) ல் உள்ளவற்றை இருபக்கங்களிலும் கனஞ்செய்ய

$$\alpha^3+\alpha^6+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)=\frac{-b^3}{a^3} \text{ ஆம்.}$$

(ii) ல் உள்ளதனை யிங்குப் பிரதியிட

$$\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}+3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{-b^3}{a^3} \text{ ஆம்.}$$

அஃதாவது, $\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}=\frac{3bc}{a^2}$ ஆம்.

முற்றிலும் a^3 ஆல் பெருக்க $a^2c+c^2a+b^3=3abc$ ஆம்.

ஆகவே, $a^2c+ac^2+b^3=3\,abc$ என்பதுவே நிபந்தனையாகும்.

குறிப்பு :

$$\alpha+\alpha^2=\frac{-b}{a}$$

$$\therefore\quad 1+\alpha+\alpha^2=1-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{a} \qquad \text{(i)}$$

மேலும், $\alpha+\alpha^2+\alpha^3=-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$

$$\therefore\quad \alpha(1+\alpha+\alpha^2)=\frac{c-b}{a} \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii) களிலிருந்து $\alpha=\frac{c-b}{a}\times\frac{a}{a-b}$ ஆம்

$\therefore\quad \frac{c}{a}=\alpha^3=\frac{(c-b)^3}{(a-b)^3}$ ஆம்;

அஃதாவது $\underline{c(a-b)^3=a(c-b)^3}$ ஆம்.

இவ்வடிவிலும் அந்நிபந்தனையைப் பெறலாம். இதைச் சுருக்கினால் $a^2c+ac^2+b^3=3abc$ என முன்கண்டதே வருமாறு அறிக.

4 $px^2-(p+q)x+q=0$ **என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமானால், $p=q$ என்று காட்டுக :**

மூலங்கள் சமமானால், நிர்ணயராசி (Discriminant) $=0$ ஆகும்,

$$\begin{aligned}\text{நிர்ணயராசி} &= [-(p+q)]^2-4pq\\ &= (p+q)^2-4pq\\ &= (p-q)^2\end{aligned}$$

$\therefore\quad (p-q)^2=0$ ஆதல்வேண்டும்

$\therefore\quad p=q$ ஆகும்.

5. $(x-p)^2-4(x-q)(x-r)=0$ **என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் p, q, r ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் நிச (*real*) ராசிகளாகு மெனக் காண்பி.**

கொடுத்த சமன்பாடு : $3x^2+2\,[p-2q-2r)\,x-(p^2-4qr)=0$ ஆகும்.

மூலங்கள் நிச (*reat*) ராசிகளாக, நிர்ணயராசி (discriminent) ≥ 0 என்று காண்பிக்கப்படவேண்டும்.

நிர்ணயராசி $= 4(p-2q-2r)^2+12(p^2-4qr)$
$= 16(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$ ஆகும்.

இப்பொழுது, $p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp=\frac{1}{2}[(p-q)^2+q-r)^2+r-p)^2]$

$\therefore$ நிர்ணயராசி $= 8[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2] \geq 0$ ஆகும்.

$\therefore$ மூலங்கள் நிச ராசிகளாகும்.

6. $(b+c)x^2-(a+b+c)x+a=0$ **என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (Ratinoal) விகித ராசிகளாகுமெனக் காட்டுக.**

கொடுத்த சாம்யத்தின் நிர்ணயராசி

$$= (a+b+c)^2-4a(b+c)$$
$$= a^2+(b+c)^2+2a(b+c)-4a(b+c)$$
$$= a^2+(b+c)^2-2a(b+c)$$
$$= [a-b+c)]^2,$$ இது ஒரு முழுவர்க்கமாகும்.

$\therefore$ மூலங்கள் விகித ராசிகளாகும்.

7. $px^2+2x+1=0$ **ம்,** $x^2+2x+p=0$ **ம் ஒரு பொது மூலங் கொள்ளுமெனின்,** p**ன் மதிப்பைக் காண்க :**

பொது மூலம் α எனக் கொள்ள,

$\therefore$ $p\alpha^2+2\alpha+1=0$
$\alpha^2+2\alpha+p=0$ எனவரும்.

இனி, குறுக்குப் பெருக்கல் (cross multiplication) விதியின்படி,

$$\frac{\alpha 2}{2p-2} = \frac{\alpha}{1-p^2} = \frac{1}{2p-2}$$ ஆகும்.

$\therefore$ $(2p-2)\ (2p-2) = (1-p^2)^2$,,

$\therefore$ $2p-2=\pm\ (1-p^2)$,,

$\therefore$ $p^2+2p-3=0$ அல்லது $p^2-2p+1=0$,,

அதாவது $(p-1)\ (p+3)=0$ அல்லது $(p-1)^2=0$

$\therefore$ $p=1$ அல்லது -3 எனவரும்.

$p=1$ என்று பிரதியிட்டால், இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் $x^2+2x+1=0$ என்கிற நிலை ஏற்படுகிறது.

$p=-3$ என்று பிரதியிட்டால், வெவ்வேறு சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$\therefore\ p=-3$; பொதுமூலம் $=1$

8. $x^2-cx+d=0$ **ம்,** $x^2-ax+b=0$ **ம் ஒரு பொது மூலங் கொள்வதுடன், இரண்டாவது சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமுமானல்** $2(b+d)=ac$ **எனக் காட்டுக :**

இப்பொழுது, $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ என்றதனைக்கொண்டு

$x^2-ax+b=0$ன் மூலங்கள் சமமாவதால், $a^2=4b$ (i) ஆம்

$\therefore \qquad x=\dfrac{a}{2}$ (ii) ,,

$x=\dfrac{a}{2}$ என்பது $x^2-cx+d=0$ என்றசமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும்.

$\therefore\ x=\dfrac{a}{2}$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\frac{a^2}{4}-c\left(\frac{a}{2}\right)\ \ d=0 \text{ ஆக வேண்டும்.}$$

(அல்லது) $\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{ac}{2}+d=0$,,

(i) லிருந்து, $a^2=4b$ என்று பிரதியிட

$$b-\frac{ac}{2}+d=0 \text{ அல்லது } 2(b+d)=ac \text{ ஆகும்.}$$

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினாக்கள்

1. α, β என்பன $x^2+px+q=0$ ன் மூலங்களாமெனின், (i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களையறிக.

α, β என்பன $x^2+px+q=0$ ன் மூலங்களாதலின்,

$\alpha+\beta=-p$; $\alpha\beta=q$ ஆம்

இனி, (i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p)^2-2q=p^2-2q.$

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\quad \alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4 &=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2\\ &=(p^2-2q)^2-q^2\\ &=(p^2-2q+q)\ (p^2-2q-q)\\ &=(p^2-q)(p^2-3q)\end{aligned}$$

2. $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்கள் α, β என்பனவானால், $\alpha^3\ \beta^3$ என்பனவற்றை மூலங்களாகக் கொள்ளும் சமன்பாட்டை வரைக.

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a};\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

α^3. β^3க்களை மூலங்களாகக் கொள்ளும் சமன்பாடானது

$x^2-(\alpha^3+\beta^3)x+\alpha^3\beta^3=0$ என அமையும்.

அஃதாவது $x^2-[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]x+(\alpha\beta)^3=0$

,, $x^2-\left[-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}\right]x+\frac{c^3}{a^3}=0$

,, $a^3x^2+x(b^3-3abc)+c^3=0$

,, $a^3x^2+bx(b^3-3ac)+c^3=0.$

3. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்களானால், $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$ என்பனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்டுள்ள சமன்பாட்டை வரைக.

α, β என்பன $ax+bx+c=0$ ன் மூலங்களாதலின்,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a};\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$m=\frac{\alpha^2}{\beta}$, $n=\frac{\beta^2}{\alpha}$ என்று கொள்க.

அப்பொழுது, $m+n = \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$ ஆகும்.

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\frac{-b^3}{a^3}-\frac{3c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{\frac{3bc}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}}{c/a}=\frac{3abc-b^3}{a^3}\times\frac{a}{c}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$$

$$\therefore\ m+n=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$$

இனி, $mn=\frac{\alpha^2}{\beta}\times\frac{\beta^2}{\alpha}=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

∴ வேண்டிய சமன்பாடாவது

$$x^2-(m+n)x+mn=0$$

அஃதாவது, $x^2-\frac{3abc-b^3}{a^2c}+\frac{c}{a}=0$

,, $a^2cx^2-b(3ac-b^2)x+ac^2=0.$

4. $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலம் மற்றொரு மூலத்தோடு விகிதம் r எனக் கொள்ளுமாயின், அவ்விகிதம் $acr^2+(2ac-b^2)r+ac=0$ யினால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்களானால்,

அப்பொழுது, $\frac{\alpha}{\beta}=r$ அல்லது $\frac{\beta}{\alpha}=r$ ஆம்

அஃதாவது, $\alpha - r\beta = 0$ அல்லது $\beta - r\alpha = 0$

எனவே, $(\alpha - r\beta)(\beta - r\alpha) = 0$ ஆகும்.

அஃதாவது, $r\alpha^2 + r\beta^2 - r^2\alpha\beta - \alpha\beta = 0$

$$\therefore \quad r(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(r^2 + 1) = 0$$

$$\therefore \quad r[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] - \alpha\beta(r^2 + 1) = 0$$

$$\therefore \quad r\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right] - \frac{c}{a}(r^2 + 1) = 0$$

அஃதாவது, $r(b^2 - 2ac) - ac(r^2 + 1) = 0$

$$\therefore \quad acr^2 + (2ac - b^2)r + ac = 0.$$

பயிற்சி 5·1

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்க.

1. $28x^2 + x - 45 = 0$

[விடை : $x = \frac{5}{4}$ அல்லது $-\frac{9}{7}$]

2. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 7\frac{3}{8} = 8$

[விடை : $\frac{3}{2}$ அல்லது $-\frac{5}{6}$]

3. $\dfrac{7}{3x-1} - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{1}{4}$

[விடை : $\frac{5}{4}$; -9]

4. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

[விடை : $1 \pm \sqrt{5}$]

5. $8x^6 + 19x^3 - 27 = 0$

[விடை : $1, -\frac{3}{2}$]

6. $(a+b)^2x^2 - 4abx - (a-b)^2 = 0$

[விடை : $1, -(a-b)^2/(a+b)^2$]

7. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$

$$\left[\text{விடை:}\quad \frac{a+b}{a-b};\ \frac{a-b}{a+b}\right]$$

8. $\dfrac{1}{6x^2-7x+2}+\dfrac{1}{12x^2-17x+6}=\dfrac{1}{8x^2-6x+1}$

[விடை: $-\frac{1}{4}$]

9. $2^{2x+1}-20=12\cdot 2^{x-2}$

[விடை: 2]

10. $x^{\frac{1}{m}}+4x^{-\frac{1}{m}}=5$

[விடை: 4^m அல்லது 1]

11. $3(2x^2-x)^2-8(2x^2-x)+5=0$

[விடை: $1,\ -\frac{1}{2},\ (3\pm\sqrt{129})/12$]

12. $\sqrt{\dfrac{a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}=\dfrac{37}{6}$ ஆனால், a ஐக் கண்டறிக.

[விடை: 36/37; 1/37]

13. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$

[விடை: $1\pm\sqrt{5},\ 1\pm2\sqrt{5}$]

14. $(x+2)(x+3)(3a-1)(3x+2)+12=0$

[விடை: 0, −8/3]

15. $x^4-6x^3-14x^2-6x+1=0$

[விடை: $1,\ 4\pm\sqrt{5}$]

16. $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

[விடை: $\frac{1}{2},\ -2,\ -3,\ \frac{1}{3}$]

17. $\sqrt{12+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{29-x}$

[விடை: 4 −24/5]

18. $x(x+1)+3\sqrt{2x^2+6x+5}=25-2x$

[விடை: 2, −5]

19. $(x+4)(x+1)+\sqrt{(x+5)(x-3)} = 3x+31$

[விடை : $4, -6$]

20. $(x-1)(3x+2)+\dfrac{8}{(x-1)(3x+2)}=9$

[விடை : $2, -5/3$]

21. $\sqrt{x^2-7x+10}-\sqrt{x^2+x-6}=x-2$

[விடை : $2, 6$]

22. $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$

[விடை : $3, -5/3$]

23. $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{x^2+x-5}$

[விடை : $-3, 2$]

24. $\sqrt{4x^2-7x-15}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2-9}$

[விடை : 3]

பயிற்சி 5·2

1. α, β என்பன $x^2+px+q=0$ ன் மூலங்களானால், p, q க்களைச் சார்த்தி (i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\alpha^3-\beta^3$ என்பவற்றின் மதிப்பை யறிக.

2. α, β என்பன $ax^2-bx+c=0$ ன் மூலங்களானால்,

(i) $\alpha^{-2}+\beta^{-2}$ (ii) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ (iii) $\alpha^2\beta^{-1}+\beta^2\alpha^{-1}$ என்பவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

3. α, β என்பன $x^2-4x+1=0$ ன் மூலங்களாயின், $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^4+\beta^4$ என்பவற்றின் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக.

[விடை ; $14, 52, 194$]

4. p, q என்பன $x^2+ax+b=0$ ன் மூலங்களாமெனின், a, bக்களைச் சார்த்தி $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}$ ன் மதிப்பைக் கூறுக.

[விடை : $[a^2-2b)-b^2$]

5. α, β என்பன $x^2-p(x+1)-c=0$ என்றதன் மூலங்களாயின், $(\alpha+1)(\beta+1)-1=c$ ஆம் என்று நிரூபிக்க.

6. α, β என்பன $x^2-px+q=0$ க்கு மூலங்களும், α^3, β^3 என்பன $x^2-ax+b=0$க்கு மூலங்களும் ஆகுமானால் a, bக்களின் மதிப்புக்களை p, qக்களோடு சார்த்தி அறிக.

[விடை : $a=p^3-3pq$; $b=q^3$]

7. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்றதன் மூலங்களானல், $(2-\alpha^3)(2-\beta^3)$ன் மதிப்பை யறிக.

[விடை : $(4a^3+2b^3+c^3-6abc)/a^3$]

8. α, β என்பன் $ax^2+bx+c=0$ என்றதன் மூலங்களானல், இதன் குணிதங்களைச் சார்த்தி $(a\alpha+b)^{-1}+(a\beta+b)^{-1}$ன் மதிப்பை யறிக.

[விடை : b/ac]

9. α, β என்பன $x^2-px+q=0$ன் மூலங்களாவதோடு $v_n=\alpha^n+\beta^n$ எனவும் அமையுமாயின், $v_{n+1}=pv_n-qv_{n-1}$ என்று காட்டுக. இதை யுபயோகித்தாயினும், பிறவற்ருனுயினும் $\alpha^5+\beta^5$ன் மதிப்பை யறிக.

10. α, β என்ப $ax^2+bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பை யறிக :

(i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ (ii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$

(iii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$ (iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

(v) $(\alpha-\beta)^2$ (vi) $(\alpha+k)^{-2}+(\beta-k)^{-2}$ இவ்விடத்து k என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

பயிற்சி 5·3

(கொடுத்த மூலங்களைக் கொண்டு சமன்பாட்டை அமைத்தல்)

1. (*a*) (i) $-2, +3$ (ii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ (iii) $5, \frac{1}{5}$ (iv) $2, -3, \frac{7}{5}$ (v) $\frac{5}{6}, 1\frac{1}{3}$ (vi) $m, \frac{1}{m}$ என்னும் மூலங்களைக் கொள்ளும் சமன்பாடுகளை முறையே வரைக.

(*b*) $x=5$, என்றும் $x=-4$ என்றும் மதிப்பீடு செய்ய மறைவுறும் சமன்பாட்டை யறிக.

[விடை : $x^2-x-20=0$)

2. (i) $5+2\sqrt{3}$ (ii) $a-\sqrt{b}$ என்பவற்றை மூலங்களுள் ஒன்ருகக் கொள்ளும் இருபடிச் சமன்பாடுகளை வரைக.

[விடை ; $x^2-10x+13=0$: $x^2-2ax(a^2-b^2)=0$]

3. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்களாயின், $3\alpha+\beta$, $3\beta+\alpha$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொள்ளும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $a^2x^2+4abx+3b^2+4ac=0$]

4. p, q என்பன $5x^2-x-2=0$ ன் மூலங்களானல், $\frac{2}{p}, \frac{2}{q}$ களை மூலங்களாகக் கொள்ளும் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

[விடை : $x^2+x-10=0$]

5. α, β என்பன $x^2-3x+5=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களானல், $\alpha^2+\beta$, $\beta^2+\alpha$ என்னும் மூலங்களை ஏற்கும் சமன்பாட்டை யெழுதுக.

6. p, q என்பன $x^2+ax+b=0$ன் மூலங்களாகுமானல், $(p-1)^2$, $(q-1)^2$ என்னும் மூலங்களை யேற்கும் சமன்பாட்டை வரைக.

7. $x^2-5x+7=0$ என்னும் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களின் வர்க்கத்தின் மேலும் 2 அதிகரிக்கப் பெறும் பரிமாணங்களை மூலங்களாகக் கொண்டமையும் சமன்பாட்டை வரை.

[விடை : $a^2-15x+75=0$)

8. α, β என்பன $x^2+px+q=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாமெனின், (i) $\alpha^2-2;\ \beta^2-2$ (ii) $m\alpha+\beta,\ m\beta+\alpha$ (iii) $2\alpha+\frac{1}{\beta};\ 2\beta+\frac{1}{\alpha}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்டமையும் சமன்பாடுகளை வரைக.

9. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்களாகுமானால், பின்வருவனவற்றை மூலங்களாகக் கொள்ளக்கூடிய சமன்பாடுகளை அமைக்க :

(i) $\frac{\alpha^2}{\beta},\ \frac{\beta^2}{\alpha}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha^2+2\alpha\beta;\ \beta^2+\alpha\beta$ (iv) $m\alpha+n\beta;\ n\alpha+m\beta$

(v) $\alpha+\frac{2}{\beta};\ \beta+\frac{2}{\alpha}$ (vi) $h\alpha+k;\ h\beta+k.$

10. $2x^2+5(m+n)x+m^2+n^2=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குரிய மூலங்களின் கூட்டுப்பலன் கழித்தற்பலன்களின் வர்க்கங்களைத் தனக்கு மூலங்களாகக் கொளத்தகு சமன்பாட்டை அமைக்க.

[விடை : $x^2-4mnx-(m^2-n^2)=0.$

பயிற்சி 5·4

1. $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டில் பின்வருவன அமைவுறுதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையை வரைக :

(i) மூலங்களிரண்டும் தனராசி (+) களாதல்

(ii) மூலங்களிரண்டும் ருணராசி (−) களாதல்

(iii) மூலங்கள் மாறுபட்ட ராசிகளைக் கொள்ளுதல்

(iv) மூலங்கள் சமமாயும் மாறுபட்ட ருணராசிகளாயுமிருத்தல்

(v) ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்தின் விலோமம் (Reciprocal) ஆதல்

(vi) ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்திற்கு இரு மடங்கோ அல்லது k மடங்கோ ஆதல்;

(vii) ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்தின் கனமாதல்;

(viii) ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்திற்கு d வித்தியாசங் கொள்ளுதல்;

(ix) ஒரு மூலம் பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமமாதல்;

(x) ஒரு மூலம் முடிவுறாததாதல் (infinite);

(xi) இரு மூலங்களும் பூஜ்ஜியமாதல்;

(xii) இரு மூலங்களும் முடிவுறாத ராசிகளாதல்

2. $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டில் ஒரு மூலம் பிறிது மூலத்தின் n ஆவது படியானால், குணிதங்களுக்குள்ள தொடர்பை யறிக.

3. $ax^2+bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டில் ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்தின் வர்க்கமாதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்க.

[மாதிரிக் கணக்கைப் பார்]

4. $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குரிய மூலங்கள் $m:n$ விகிதத்தில் விளங்குதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைத் தெரிக.

$[mnb^2=ac(m+n)^2]$

5. $ax^2+bx+c=0$ன் ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்திற்கு r மடங்காகு மானால், rன் மதிப்பு $acr^2+2(ac-b^2)r+ac=0$ என்றதிலிருந்து பெறக் கிடைக்குமெனக் காட்டுக.

[மாதிரிக் கணக்கைப் பார்]

6. $(\sqrt{5}-2)(x^2-x)=1$ என்னும் சமன்பாட்டில் ஒரு மூலமானது மற்ற மூலத்தின் வர்க்கமாகுமெனக் காட்டுக.

7. எப்பொழுது $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+a}$ என்பதன் மூலங்கள் பரிமாணங்களால் சமமாயும், இராசிக்குறியால் மாறுபட்டும் தோன்றும்?

[விடை : $a^2=2m^2$]

8. $\dfrac{1}{x+p}+\dfrac{1}{x+q}=\dfrac{1}{r}$ ன் மூலங்கள் சமமாயும் மாறுபட்ட ராசிகளாயும் இருந்தால், அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $-\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ஆகுமென நிரூபிக்க.

9. x^2-px+qன் மூலங்களின் வித்தியாசம் 1 ஆகுமானால், $p^2=4q+1$ என்று நிரூபி.

பயிற்சி 5·5

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களின் தன்மைகளை யாராய்க :

(i) $2x^2+x+3=0$	(ii) $4x^2+12x+9=0$
(iii) $3x^2-22x-16=0$	(iv) $4x^2+7x-1=0$
(v) $3x^2-x+1=0$	(vi) $2x^2-9x-5=0$
(vii) $6x^2-13x-5=0$	(viii) $a^2x^2+2abx+b^2=0$.

2. $x^2-2(7+3p)x+5(9+11p)=0$ ஆனது சம மூலங்களைப் பெறுகின்றதானால், pன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $p=1,\ \frac{4}{9}$]

3. $x^2-2mx+8m-15=0$ ஆனது சம மூலங்களைக் கொள்ளுவதானால் mன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : $m=5$ அல்லது 3]

4. $u=16x^2+12x+39$; $v=9x^2-2x+11$ ஆனால், $u+kv=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாடு சமமூலங்களைக் கொள்ளுதற்கு k என்னும் மாறிலியின் மதிப்பையறிக.

[விடை : $k=\frac{3}{4}$ அல்லது -4]

5. $a+b+c=0$ ஆனால், $ax^2+bx+c=0$ன் மூலங்கள் விகிதராசி (Rational) களாகுமென நிரூபிக்க.

6. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் விகிதராசிகளாகுமெனக் காட்டுக :

(i) $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$

(ii) $(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0.$

7. k ன் மதிப்பு யாதாயின் $12x^2-10xy+2y^2+11x+5y+k$ என்னுங் கோவை x, y ன் ஒருபடிக் கோவைக் காரணிகளாகப் பகுபடுவதாகும்.

[விடை : $k=1$]

8. p ன் எம்மதிப்புக்கு $2x^2+3xy-2y^2-5x+py-12$ ஆனது இரண்டு நிச (Real) ஒரு படிக்கோவைக் காரணிகளாகப் பகுபடும்.

[விடை : $p=10, -32/5$]

9. a, b, c க்கள் நிசராசிகளானுல், $(a-x)(b-x)=c^2$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் நிச ராசிகளாகுமெனக் காட்டுக.

10. a நிசராசியானுல் $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=a$ன் மூலங்களும் நிசராசிகளாமெனக் காட்டுக.

11. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் எப்பொழுதுமே நிசராசிக ளாகுமெனக் காட்டுக.

(i) $(b^2-4ac)x^2+4(a+c)x-4=0$

(ii) $(x-p)(x-q)+(x-q)(x-r)+(x-r)(x-p)=0$

(iii) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$

12. $ax^2+2bx+b=0$ன் மூலங்கள் கற்பனைகளானுல், $bx^2+(b-c)x+(b-c-a)=0$ ன் மூலங்கள் நிசராசிகளாமென நிரூபிக்க.

பயிற்சி 5.6

(இரு வேறுபட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களுக்குள்ள தொடர்புகள்)

1. $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $a'x^2+b'x+c'=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கு m மடங்காதற்கு நிபந்தனை யாது ?

2. (i) $lx^2+mx+n=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டினது மூலங்களின் விலோமங்கள் (Reciprocal) ஆனால், $a : b : c=n : m : l$ என்று நிறுவி.

(ii) $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமானது $a'x^2+b'x+c'=0$ என்னும் சமன்பாட்டினது ஒரு மூலத்திற்கு விலோம மாதற்கு நிபந்தனை யாது ?

3. $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களும், $Ax^2+Bx+C=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் ஒரு நிலையான பரிமாணம் வித்தியாசப்பட்டிருக்க நிபந்தனை யாதாகும் ?

4. $x^2+px+q=0$ ன் மூலங்களின் விகிதம் $x^2+mx+n=0$ ன் மூலங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமாகுமானால் $np^2=m^2q$ என நிறுவிக்க.

5. $ax^2+bx+c=0$ ம், $ax^2+b_1x+c_1=0$ ம் ஒரு பொதுமூலம் பெறுதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க. அப் பொதுமூலம் $-(c-c_1)/(b-b_1)$ ஆமெனக் காட்டுக.

6. $ax^2+bx+c=0$ம், $bx^2+cx+a=0$ம் ஒரு பொதுமூலம் பெறுமானால் 'a' பூஜ்ஜியமாதல் ஆதல் அல்லது $a^3+b^3+c^3=3abc$ ஆதல் வேண்டுமென நிறுவிக்க.

7. $ax^2+bx+c=0$ ஆனது $bx^2+cx+a=0$ என்றதனோடு ஒரு பொதுமூலம் கொள்ளுமானால், ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் ஏனைய மூலங்களை அறிக.

8. $x^2+ax+bc=0$ ம் $x^2+bx+ca=0$ ம் ஒரு பொது மூலங் கொள்ளுமெனின், மற்ற மூலங்கள் $x^2+cx+ab=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு இசைவனவாமெனக் காட்டுக.

9. $ax^3+bx^2+x+d=0$ ம் $a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$ ம் இரண்டு பொது மூலங்களைக் கொள்ளுமானால், இப்பொது மூலங்களையே தனக்குரிய மூலங்களாகப் பெற்று நிற்கும் இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும், $\dfrac{ab'-a'b}{ad'-a'd}=\dfrac{ac'-a'c}{bd'-b'd}=\dfrac{ad'-a'd}{cd'-c'd}$ என்றும் நிறுவி.

10. $x^2+abx+c=0$ ம் $x^2+acx+b=0$ ம் ஒரு பொதுமூலங் கொள்வனவாம்: b ஆனது c க்குச் சமமு மல்ல. எனின், மற்றை

மூலங்கள் $a(b+c)x^2+(b+c)x+abc=0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்துவனவாமெனக் காட்டுக.

11. $x^2+px+q=0$ ம், $x^2+qx+r=0$ ம் ஒரு பொதுமூலம் பெறுவனவாமெனின், $p=q$ ஆதல் அல்லது $p+q+1=0$ ஆதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

12. $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ம், $ax^2+2bx+c=0$ ம் ஒரு பொது மூலம் ஏற்குமாஞல், $(bc-ad)^2=4(b^2-ac)(c^2-bd)$ என்று நிரூபி.

10. இருபடிக் கோவைகளின் கொள்கை : (Theory of Quadratic Expressions)

இரண்டாவது படியுடைய கோவை இருபடிக்கோவை யெனப்படும். ஒரு மாறியில் அதன் நியமருபம் ax^2+bx+c ஆகும்.

1. x எய்தும் எலலா நிசமதிப்புக்களுக்கும் அதாவது x ன் மதிப்பு $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரையில் மாறும்பொழுது, ax^2+bx+c ன் இராசிக் குறியில் ஏற்படும் மாறுதல்களைக் கண்டறிக.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{2a}\right] \text{ ஆம்.}$$

வகை I.

b^2-4ac ருணியாசி (Negative) யதாகுக

அப்பொழுது அடைப்பினுள் கிடக்கும் கோவையானது x பெறும் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் தனராசி (Positive) யாகவே இருக்கும். ஆகவே, கோவையானது x ன் எல்லாமதிப்புக்களுக்கும் a பெறும் இராசிக்குறியையே தானும் கொண்டு நிற்கும்,

வகை II.

b^2-4ac பூஜ்ஜிய மாகுக.

அப்பொழுது கோவை $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ஆம்.

x பெறும் எல்லா மதிப்புக்கும் $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ வர்க்கமா யிருப்பதால் தனராசியாகும். எனவே a பெறும் ராசிக்குறிக்கு ஒத்த ராசியையே கோவையும் பெறுநிற்கும்.

வகை III.

b^2-4ac தனராசி (Positive) யதாகுக.

அப்பொழுது $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாடு நிச மூலங்களைப் பெறும். α, β என்பன அச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகுமாஞல், அப்பொழுது $x-\alpha$, $x-\beta$ என்பன ax^2+bx+c என்னும் கோவையின் காரணிகளாகும். (யாங்ஙனமெனின், $x-\alpha$ என்பது ax^2+bx+c ன் காரணியாஞல், மீதித் தேற்றத்தின்படி $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ஆம். அஃதாவது, $ax^2+bx+c=0$ க்கு α ஒரு மூலமாகும்.]

$\therefore \quad ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(\alpha-\beta)$.

α ஆனது β ஐவிட பெரியதாகுக

$x>\alpha$ ஆஞல், இரண்டு காரணிகளும் தனராசியன ஆகும்.

$\therefore$ கோவையானது a ன் ராசிக்குறியையே கொள்ளும்.

$x<\beta$, ஆஞல், இரண்டு காரணிகளும் ருணராசியன ஆகி, அவற்றின் பெருக்கற்பலன் தனராசிய தாகும், அதஞல், கோர்வையானது a ன் ராசிக்குறியையே ஏற்கும்.

x ஆனது α க்கும் β க்கும் இடைப்படு மதிப்புடையதாயின், $x-\alpha$ ருணராசியதும், $x-\beta$ தனராசியதுமாக, அவற்றின் பெருக்கற் பலன் ருணராசியாகும். அப்பொழுது கோவையானது a ன் ராசிக்குறிக்கு மாறுபட்ட இராசிக்குறியைக் கொள்ளும்.

இவற்ருல், b^2-4ac தனராசியாதலும் x ன் மதிப்பு $ax^2+bx+c=0$ என்றதன் மூலங்களுக்கு இடை நிற்றலும் ஆகிய இடங்கள் தவிர, மற்றபடி x பெறும் எல்லா மதிப்புக்கும் a ன் ராசிக்குறியையே கோவையும் ஏற்று நிற்கும் : ஆஞல் x மூலங்களுக்கு இடைநிற்கும் பொழுது, கோவை a யின் இராசிக் குறிக்கு மாறுபட்ட இராசியைக் குறியைப் பெற்றுநிற்கும்.

2. x ன் எல்லா நிசமதிப்புக்களுக்கும் ax^2+bx+c அடையும் மதிப்பில் காணப்படும் மாறுதல்களைக் காண்க.

x ன் மதிப்பு மாறுபடக் கோவையின் மதிப்பும் வேறுபடும். x க்கு $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரையில் எந்த நிசமதிப்பைக் கொடுத்தாலும், நாம் விரும்பிய வண்ணம் எந்த நிசமதிப்பையேனும் கோவையைக் கொள்ள வைக்க முடியாது.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

இங்கு a ஆனது தனராசியாகட்டும் :

$x\to-\infty$ ஆனால், கோவை $\to+\infty$

$x=-\frac{b}{2a}$ ஆனால், கோவை $=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

$x\to+\infty$, ஆனால் கோவை மறுபடியும் $\to+\infty$

x ஆனது $-\frac{b}{2a}$ ன் ஊடே $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரையில் மதிப்பு அதிகப்படுகையில், கோவையின் மதிப்பானது $+\infty$ யிலிருந்து $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ க்குக் குறைவடைந்து, பிறகு $-\infty$ க்கு அதிகப்படுகின்றது.

ஆகவே, a தனராசியாகி, x ஆனது $-\frac{b}{2a}$ என்னும் மதிப்பைக் கொள்ளும்பொழுது கோவையானது $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ என்னுங் குறைந்த பக்ஷ மதிப்பைப் பெறும்.

b^2-4ac தனராசியானால், ax^2+bx+c என்னுங் கோவையானது நிசக்காரணிகளாகப் பகுக்கப்பட்டு $a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்றமைத்தெழுதப்படும்.

$x=\alpha$ அல்லது β ஆகும்பொழுது கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

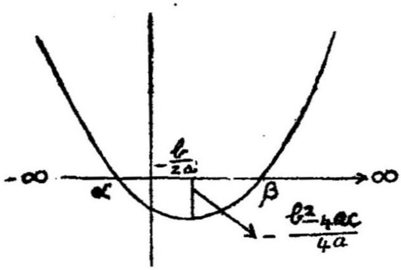
மேற்குறித்தவாறு ஒரு கோவையின் மதிப்பில் அறியக் கிடக்கும் மாறுபாடுகளையெல்லாம் வரைப்பட விளக்கங்கள் வாயிலாகத் தெரிவுறக் காணலாம்.

ax^2+bx+cன் வரைப்பட விளக்கம்

வகை I

'a' தனராசியும், b^2-4ac தனராசியும் ஆகுக.

அப்பொழுது கோவை$=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ஆம். இங்கு α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாவனவாம்.



x	$-\infty$	α	$-\frac{b}{2a}$	β	$+\infty$
y	$+$	0	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	0	$+\infty$

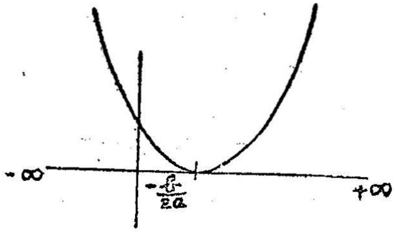
இந்த வகையில் குறைந்தபக்ஷ மதிப்பு ருணராசி ஆகும்.

வகை II

'a' தனராசியும், $b^2-4ac=0$ ம் ஆகுக.

அப்பொழுது மூலங்கள்சமமாகி, ஒவ்வொன்றும் $-\frac{a}{2a}$ மதிப்பேற்கும்.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



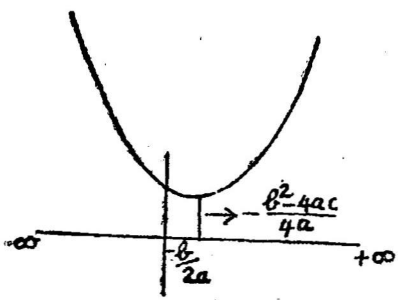
இந்த வகையில் குறைந்தபக்ஷ மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

வகை III

'a' தனராசியும், (b^2-4ac) ருணராசியும் ஆகுக.

அப்பொழுது மூலங்கள் கற்பனையாகும்.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$+\infty$



இந்த வகையில் குறைந்தபட்ச மதிப்பு தனராசியாகும்.

இவ்வாறாக, 'a' தனராசியாகி நிற்க, ax^2+bx+c என்னுங் கோவையானது $x=-\frac{b}{2a}$ ஆம்பொழுது $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ என்னுங் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் கொள்ளுகின்றது. அக் குறைந்தபட்ச மதிப்பானது b^2-4ac தனராசியும், பூஜ்ஜியமும், ருணராசியும் ஆவதற்கு ஏற்பத் தான் ருணராசியும், பூஜ்ஜியமும், தனராசியுமாக நிற்கும்.

'a' ருணராசி யாகுக.

$x \to -\infty$ ஆனால், கோவை $\to -\infty$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad ,, \qquad ,, \quad = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$x \rightarrow +\infty \quad ,, \qquad ,, \quad \rightarrow -\infty$$

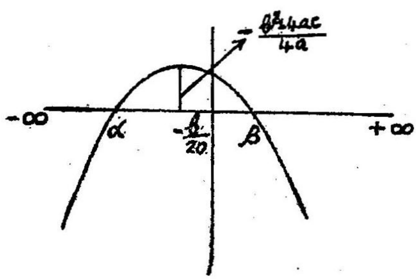
x ஆனது $-\frac{b}{2a}$ ஊடே $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரையில் மதிப்பு அதிகப் பட்டுச் செல்லுமிடத்து, கோவையின் மதிப்பானது $-\infty$ யிலிருந்து $-\frac{b^2-4ac}{4a}$க்கு அதிகப்பட்டுச் சென்றும், பிறகு $-\infty$க்குக் குறைந்து செல்லுதலு மாகும்.

ஆகவே, கோவையின் அதிக பட்ச மதிப்பு $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ஆகும்; இது $x=-\frac{b}{2a}$ ஆம்பொழுது நேரும்.

வரைப்பட விளக்கம் :

வகை I

'a' ருணராசியும்; b^2-4ac தனராசியும் ஆனால் மூலங்கள் நிசமும் அசமமுமாகும்.



x	$-\infty$	α	$-\frac{b}{2a}$	$+\beta$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	0	$-\infty$

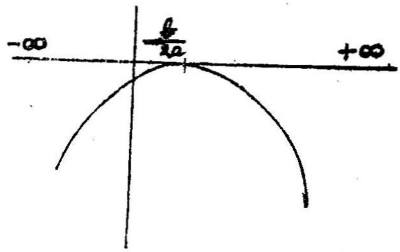
இந்த வகையில், அதிகபட்ச மதிப்பானது தனராசி (+) ஆகும்.

வகை II

'a' ருணராசியும், $b^2-4ac=0$ம் ஆகுக.

மூலங்கள் ஙிசமும், சமமுமாகும். ஒவ்வொன்றும் $= -\frac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

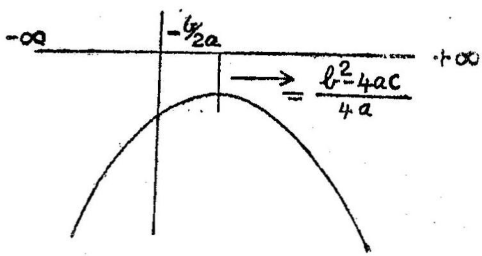


இந்த வகையில் அதிகபட்ச மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

வகை III

'a' ருண ராசியும், b^2-4ac ருணராசியுமாகுக.

மூலங்கள் கற்பனையாகும்.



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$+\infty$

இந்த வகையில் அதிகபட்ச மதிப்பு ருணராசி யாகும்.

இவ்வாறாக, a ருணராசி யாகுங்கால், ax^2+bx+c என்னுங் கோவையானது $x=-\frac{b}{2a}$ ஆகும்பொழுது அதிகபட்சமதிப்பு $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ஆகக் கொள்ளும். அவ்வதிகபட்ச மதிப்பானது b^2-4ac தன ராசியும், பூஜ்ஜியமும் ருணராசியும் ஆவதற்கு ஏற்பத் தனராசியும், பூஜ்ஜியமும் தனராசியுமாக நிற்கும்.

உதாரணம் 1 :

$3x-2x^2+7$ ன் மதிப்பிலும், ராசியிலும் நேரும் மாறுதல்களைக் குறிப்பிடுக :

கோவையானது $-2x^2+3x+7$ ஆம்.

$b^2-4ac=3^2-4(-2)(7)=9+56=65$. இது தனராசி யாதலின் கோவையானது இரண்டு நிசக்காரணிகளாகப் பகுப்புறும்.

அஃதாவது, $-(2x^2-3x-7)=-(x-\alpha)(x-\beta)$. இங்கு α, β என்பன $2x^2-3x-7=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாம், இம்மூலங்கள் $\frac{3\pm\sqrt{65}}{4}$ என்பனவாகக் பெறப்படும்.

x ஆனது $\frac{3-\sqrt{65}}{4}$ க்கும் $\frac{3+\sqrt{65}}{4}$ க்கும் இடைப்பட்டு நிற்குமாயின், கோவையானது a ன் ராசிக்குறிக்கு மாறுபட்டதோர் ராசிக்குறியைக் கொள்ளும். அஃதாவது கோவையானது தனராசியாகும். x ஆனது இம்மூலங்களின் மதிப்புக்களுக்கு அப்பாற்பட்டு நிற்குமாயின், கோவை ருணராசி யாகும்.

'a' ருணராசி யாதலின், கோவையானது $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ஐ அதிகபட்ச மதிப்பாகக் கொள்ளும். அஃது, $-\frac{65}{4(-2)}=\frac{65}{8}=8\frac{1}{8}$ ஆம். இம் மதிப்பு $x=\frac{-b}{2a}$ அல்லது $-\frac{3}{2(-2)}=\frac{3}{4}$ ஆம்பொழுது அமையும் என்க.

உதாரணம் 2 :

x என்பது நிசராசியானால், $\dfrac{x^2-2x+9}{x^2+2x+9}$ ஆனது $\frac{1}{2}$ க்கும் 2 க்கும் இடைப்பட்டுக் கிடக்கும் என்று நிரூபிக்க.

$$\frac{4x^2-2x+9}{x^2+2x+9}=y \text{ என்க.}$$

அப்பொழுது $x^2(1-y)-2x(1+y)+9(1-y)=0$ ஆம்.

x நிசராசியானால், தன்மைகாட்டி (Discriminant) யாகிய b^2-4ac தனராசி அல்லது பூஜ்யம் ஆதல் வேண்டும்.

அஃதாவது. $[\{2(1+y)\}^2-4(1-y)\times 9(1-y)]$ தனராசி அல்லது பூஜ்யம் ஆதல் வேண்டும்.

,,	$4(1+y)^2-36(1-y)^2$	,,	,,
,,	$4(1+2y+y^2-9+18y-9y^2) > 0.$	,,	,,
,,	$-8y^2+20y-8 > 0.$	,,	,,
,,	$2y^2-5y+2 \leqslant 0.$	,,	,,

∴ கோவையானது a க்கு மாறுபட்ட ராசிக்குறியைப் பெறும்.

∴ y ஆனது $2y^2-5y+2=0$, அஃதாவது $(2y-1)(y-2)=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களது மதிப்புக்கு இடைப்பட்டு நிற்றற் பாலதாகும். அஃதாவது, y ஆனது $\frac{1}{2}$ க்கும் 2 க்கும் இடையே நிற்கவேண்டும். ஆகையால், கோவையின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ க்கும் 2 க்கும் இடையே படும் என்க.

உதாரணம் 3 :

x ன் நிசமதிப்புக்களுக்கு $\dfrac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}$ என்பது எல்லா நிசமதிப்புக் களையும் ஏற்பதாகும் எனக் காட்டுக.

$$\frac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}=y \text{ என்க,}$$

அப்பொழுது, $x^2(1+y)-x(3+31y)+(2+30y)=0$ ஆம்.

x நிசராசியானல் தன்மைகாட்டி (Discriminant) $\geqslant 0$,,

அஃதாவது, $\{-(3+31y)\}^2-4(1+y)(2+30y)\geqslant 0$,,

,, $9+186y+961y^2-4(2+32y+30y^2)\geqslant 0$,,

,, $841y^2+58y+1\geqslant 0$

,, $(29y+1)^2\geqslant 0$

y எவ்வித நிசமதிப்பை ஏற்றாலும் $(29y+1)^2$ ஒரு முழுவர்க்கமாதலின், x ன் எல்லா நிசமதிப்புக்களுக்கும் $\dfrac{x^2-3x\cdot 2}{31x-x^2-30}$ ஆனது எந்த நிசமதிப்பையும் ஏற்பதாகும்.

உதாரணம் 4 :

$41x^2+24xy+9y^2-65x-30y+29=0$ ல் x ம் y ம் நிசராசிகளானல், அவற்றின் மதிப்புக்களுக்கு எல்லையை அறிக ;

இச்சமன்பாட்டை x ன் இருபடிச் சமன்பாடாகச் சீரமைக்க,

$$41x^2+(24y-65)x+(9y^2-30y+29)=0 \text{ ஆம்.}$$

x நிசமானல், தன்மைகாட்டி $\geqslant 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore\ (24y-65)^2-4\times 41(9y^2-30y+29)\geqslant 0$

அஃதாவது, $576y^2-3120y+4225-14764^2$

$$+4920y-4756\geqslant 0$$

,, $-900y^2+1800y-531\geqslant 0$

,, $900y^2-1800y+531\leqslant 0$

,, $100y^2-200y+59\leqslant 0.$

இந்நிலையில், இக்கோவையானது a க்கு மாறுபட்ட இராசிக் குறியைப் பெறவேண்டுமாதலின் y ஆனது $100y^2-200y+59=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குரிய மூலங்களின் மதிப்புக்களுக்கு இடைப்பட்டு நிற்கவேண்டும்,

இப்பொழுது, $y = \dfrac{200 \pm \sqrt{40000-23600}}{200} = 1 \pm \dfrac{1}{10}\sqrt{41}$ ஆம்.

$\therefore$ x ஏற்கும் நிசமதிப்புகளுக்கு y ஆனது $1 - \dfrac{1}{10}\sqrt{41}$ க்கும், $1 + \dfrac{1}{10}\sqrt{41}$ க்கும் இடைப்பட்டு நிற்பதாதல் வேண்டும்.

இவ்வாறே, y ன் இருபடிக் கோவையாக அமைத்தெழுதினுல்

$$9y^2 + (24x-30)y + 41x^2 - (5x+29) = 0 \text{ ஆம்.}$$

y நிசராசி யாதலின், இதன் தன்மைகாட்டி $\geqslant 0$ ஆதல் வேண்டும்.

அஃதாவது, $(24x-30)^2 - 4 \times 9(41x^2 - 65x + 29) \geqslant 0$

,, $576x^2 - 1440x + 900 - 1476x^2 + 2340x - 1045 \geqslant 0$

,, $-900x^2 + 900x - 144 \geqslant 0$

,, $900x^2 - 900x + 144 \leqslant 0$

,, $25x^2 - 25x + 4 \leqslant 0$

,, $(5x-4)(5x-1) \leqslant 0$

$\therefore$ y ன் நிச மதிப்புக்களுக்கு x ஆனது $\frac{1}{5}$ க்கும் $\frac{4}{5}$ க்கும் இடை நிற்றல் வேண்டும்.

பயிற்சி 5·7

1. எந்த மதிப்புக்களுக்கு இடையில் x இருந்தால் $39 - 4x - 4x^2$ தனராசியாகும்.

[விடை : $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$ க்கு இடையில்]

2. $1000 - x(2+3x)$ தனராசியாதற்கு x பெறக்கூடிய அதிகபட்ச தனராசி முழு எண் மதிப்பு யாது ?

[விடை : 17]

3. பின்வருவன பரிமாணத்திலும் ராசிக் குறியிலும் பெறும் மாறுதல்களை ஆராய்க :

(i) $4-5x-3x^2$

[விடை ; $-\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{73}$ இடையில், அதிகபட்சம் $7\frac{8}{12}$]

(ii) $2x^2-x-6$

[விடை ; $-\frac{3}{2}$ க்கும் 2 க்கும் இடையில்; குறைந்தபட்சம் $-6\frac{1}{8}$]

(iii) $3x-2x^2-7$

[விடை ; $-\frac{2}{5}$ க்கும் 1 க்கும் இடையில்; அதிகபட்சம் $-5\frac{7}{8}$]

4. x நிசராசியானால், $\frac{x}{x^2-5x+9}$ ஆனது 1 க்கும் $-\frac{1}{11}$ க்கும் இடையில் நிற்கும்.

5. x ன் நிசமதிப்புகளுக்கெல்லாம் $\frac{x^2+2}{2x^2-2x+1}$ ஆனது $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ க்கும் $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ க்கும் இடையில் நிற்கும்.

6. x நிசராசியானால், $\frac{1}{5}>\frac{x^2-\frac{4}{3}x+1}{x^2+\frac{4}{3}x+1}<5$ என்று காட்டுக.

7. x ன் நிசமதிப்புக்களுக்கு $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-71}$ ஆனது 5 க்கும் 9 க்கும் அப்பால்பட்டு நிற்குமெனக் காட்டுக.

8. x ன் நிசமதிப்புக்களுக்கு $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$ ஆனது $\frac{4}{9}$ க்கும் 1 க்கும் அப்பால் நிற்குமெனக் காட்டுக.

9. x ன் நிசமதிப்புக்களுக்கு $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{(x+1)(3x+1)}$ ஆனது 1 க்கும் 4 க்கும் இடைநிற்றல் முடியாதெனக் காட்டுக.

10. x ன் நிசமதிப்புக்களுக்கு $x+\frac{4}{x}+3$ என்னும் கோவையானது -1க்கும் 7 க்கும் இடையில் யாதொருமதிப்பையும் பெற இயலாதெனக் காட்டுக.

11. x ன் நிச மதிப்புக்களுக்கு $\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}$ ஆனது $-\frac{1}{3}$ க்குக் குறைவாக எப்பொழுதும் பெருதெனக் காட்டுக.

12. $x^2-4(m-1)x+(m-1)(m-2)=0$ நிசராசியாதற்கு x ஆனது இடைப்பட்டு நிற்க வேண்டிய மதிப்புக்களின் எல்லையைக் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{2}{3}$ க்கும் 1க்கும் அப்பால் நிற்கும்]

13. $(a-2)x^2+2(2a-3)x+5a-6$ ஆனது நிசக் காரணிகளைப் பெறுவதற்கு x பெறக்கூடிய மதிப்புக்களின் சஞ்சரிப்பை (Range) க் காண்க.

[விடை : 1 க்கும் 3 க்கும் இடைநிற்கும்]

14. $\frac{5x^2+3x-4}{5+3x-4x^2}$ ஆனது எல்லா நிசமதிப்புக்களையும் எய்துந் தன்மையதாகுமெனக் காட்டுக.

15. x க்கு ஏற்ற நிசமதிப்பைக் கொடுப்பதனால் $\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}$ ஆனது எந்த நிசமதிப்பையும் அடையச் செய்யப்படுமெனக் காட்டுக.

16. xன் நிசமதிப்புக்களுக்கு $\frac{2}{x-\alpha}+\frac{2}{x-\beta}$ ஆனது $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரையில் எல்லா நிசமதிப்பையும் ஏற்றுக்கொள்ளு மெனக் காட்டுக.

17. x நிசராசியாகி, a, b, c என்பன ஏறுமுறையில் அல்லது இறங்குமுறையில் நிற்கும் பரிமாணங்களானால், $\frac{(x-a)(x-c)}{(x-b)}$ ஆனது எல்லா மதிப்புக்களையும் ஏற்கும் தன்மையதாகும்.

18. xன் மதிப்புக்களுக்கு $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ ஆனது $0<c<1$ ஆனால் எல்லா மதிப்புக்களையும் பெறக்கூடுமெனக் காட்டுக.

19. m ஆனது -2 க்கும் $+2$க்கும் இடைப்பட்டு நில்லாதாயின், $\frac{x^2-3mn+8}{x-2m}$ ஆனது எல்லா மதிப்புக்களையும் ஏற்குமெனக் காட்டுக.

20. x நிசராசி யாகியும், p ஆனது 1 க்கும் 7 க்கும் இடையில் யாதொரு மதிப்பையேனும் பெறுவதாகவும் இருந்தால் $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ ஆனது எல்லா மதிப்புக்களையும் எய்தக் கூடுவதாகுமெனக் காட்டுக.

21. $4x^2+y^2-16x+8y-4=0$ ஆகும்பொழுது x ம், y ம் பெறும் நிசமதிப்புக்களுக்கான எல்லையைக் கண்டறிக.

[விடை : $-1 \leqslant x \leqslant 5$; $-2 \leqslant y \leqslant 10$]

22. $x^2+4y^2-8x-16y-4=0$ ஆனால், x, y களின் அதிகபட்ச மதிப்பையுங் குறைந்தபட்ச மதிப்பையும் கண்டறிக.

[விடை : $4-2\sqrt{7} \leqslant x \leqslant 4+2\sqrt{7}$; $2-\sqrt{7} \leqslant y \leqslant 2+\sqrt{7}$]

23. $x^2+2y^2=2x+6y+\frac{3}{4}$ என்னும் சம்பந்தத்தால் தொடர்பு பட்டுள்ள x, y க்களின் நிசமதிப்புக்களுக்கான எல்லையைக் கண்டறிக.

24. $x^2-3xy+3y^2-2x-3y-35=0$ என்னும் சமன்பாட்டில் x ன் ஒவ்வொரு நிசமதிப்புக்கும் y பெறும் நிசமதிப்பு உண்டென்றும். y ன் ஒவ்வொரு நிசமதிப்புக்கும் x பெறும் நிசமதிப்பு உண்டென்றும் காட்டுக.

IV. வரைப்படங்கள் (Graphs)

ஒரு சார்பின் (Function) தலையாய தன்மைகளை ஆராய்வதற்கு வாய்க்கும் ஒரு முறையானது வரைப்பட முறையெனப்படும். அச்சார்பை $y=f(x)$ எனக் கருதுவோம். x க்குப் பல மதிப்புக்களைக் கொடுத்தால், அவற்றிற் கொத்த y ன் மதிப்புக்களைப் பெறுவோம். அவ்வாறு பெற்ற x, y களுடைய ஒத்த மதிப்புக்களுக்கு ஏற்ப அச்சுத் தூரங்களைப் பெறும் புள்ளிகளைக் குறியிட்டு, அவற்றையொரு தடைபடாத வளைவுக்கோட்டால் கூட்டிக்காட்ட அச்சார்புக்குரிய வரைப்படம் அமையும். வேறுபட்ட மதிப்புக்களின் சஞ்சரிப்பில் இடையறவு இன்றித் தொடர்ச்சிநிலை யுண்டானால், மாறிகளுக்கு இடையே ஒத்துவரும் மதிப்புக்களுக்கு முடிவில்லை யாகும். ஆகவே, குறிக்கும் புள்ளிகளும் அளவில வாகும். எந்த வரைப்படத்திலும் இம்மாதிரியான புள்ளிகளுள் ஒரு சிலவே குறித்துக் காட்டப்படும்.

x ன் யாதொரு மதிப்புக்கும் ஒத்ததாகிய y ன் மதிப்பை அறிந்து கொள்ள இத்தகைய வரைப்படத்தை உபயோகிக்கலாம். மாறியும் காணலாம். இவ்வரைப்படமானது x அச்சை யூடறுக்கு மிடங்களில் அப்புள்ளிகளின் x அச்சுத்தூரங்கள் $f(x)=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்குரிய மதிப்புக்களாகும். கொடுத்த சமன்பாட்டில் $x=0$ என்று பிரதியிட்டு, y ன் பலனைத் தீர்வுகாணுங்கால், வரைப்படமானது y அச்சை யூடறுக்கு மிடமுண்டானல், அச்சுத்தூரங்கள் y ன் மதிப்புக் களுக்கு ஒத்துள்ள புள்ளியிடங்களில் வரைப்படம் ஊடறுத்துப் போதலை யறியலாம்.

கொடுத்த சமன்பாட்டில் சமன்பாட்டை மாற்றுமல் $+y$ க்குப் பிரதியாக $-y$ ஐ யிட்டெழுத அமையுமாகில், அவ்வரைப்படம் x அச்சின் இரு மருங்கிலும் வடிவொத்துக் காணப்படும். y ன் அடுக்கு இரட்டைப்படை எண்ணுனல் இந்நிலைமை வாய்ப்பதாகும். இவ்வாறே,

x ன் அடுக்கும் இரட்டைப்படையாக இருந்தால் முன்சொன்ன நிகழ்ச்சி y அச்சை யொட்டிக் காணப்படும். x க்கு $-x$ ம், y க்கு $-y$ ம் பிரதியீடு செய்தாலும் கொடுத்த சமன்பாடு மாற்றம் அடையாதிருந்தால் அவ்வரைப்படம் அச்சுக்களின் பிறப்பிடத்தைப்பற்றி வடிவொத்து நிற்கும். இவ்வகையில் $p(a, b)$ என்னும் புள்ளி வரைப்படத்தின் மீது இருந்தால், அப்பொழுது $p'(-a, -b)$ என்னும் புள்ளியும் அவ்வரைப் படத்தின்மேல் இடம்பெற்று நிற்கக் காணப்படும். வரைப்படமானது 1 வது 3 வது கால்வட்டங்கள் அல்லது 2 ஆவது 4 ஆவது வட்டங் களில் விளங்கும். $y=$ நெடுக்கை x, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^3$ என்பவற்றின் வரைப்படங்கள் அச்சுப் பிறப்பிடத்தை யொட்டி வடிவொத்து நிற்கும். ஒரு வளைவு கோடானது இரண்டு அச்சுக்களையுந் தழுவி வடிவொத்து நின்றால், அது தன்னியல்பாகவே அச்சுப்பிறப்பிடத்தைச் சூழ்ந்து வடிவொத்து நிற்பதாகும். உதாரணமாக $x^2+y^2=25$ என்றதன் வரைப்படம் இவ்வாறே பிறப்பிடத்தைச் சூழ்ந்து வடிவொத்து விளங்கக் காணலாம்.

சமன்பாட்டைச் சோதித்துப் பின்வரும் வினாக்களை யெழுப்ப, வளைவுக் கோட்டின் வடிவமைப்பையும், எல்லை மதிப்புக்களையும் பற்றிய தகவல்கள் பேரளவுக்குக் கிடைக்கப் பெறும்:

(i) வரைப்படம் யாதேனுமோர் அச்சைச் சூழ்ந்து வடிவொத்து விளங்குகின்றதா?

(ii) வரைப்படம் அச்சுக்களின் பிறப்பிடத்தைச் சூழ்ந்து வடிவொத்து நிற்கின்றதா?

(iii) அது அச்சுக்களை எங்கெங்கு ஊடறுக்கின்றது?

(iv) y ன் மதிப்பை கற்பனையாக்குதற்குத் தக்கவாறு x ன் மதிப்பு யாதேனும் உண்டா?

(இவ்வாறே மறுதலையும் அறிக)

x அல்லது y ன் மதிப்பில் ஏதேனும் குறிப்பிட்ட பரப்பு அமைவுறுதாகின்றதா?

(v) x ன் மதிப்புக்களுள் யாவையேனும் y ன் மதிப்பை அந்த நிலைக்குக்கொண்டு போகின்றனவா, அல்லது y ன் மதிப்புக்களுள் அந்த நிலைக்குக் கொண்டு போகின்றனவா ?

(vi) x ன் மதிப்பு மிகவும் பெரிதாகும் பொழுது y ன் மதிப்பில் யாது நிகழும் ?

வளைவரை யுருவத்தை அமைத்தல்
(Tracing a Curve)

விளக்க உதாரணம்

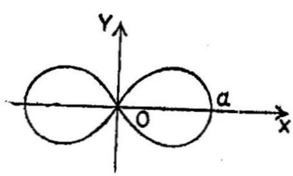
$a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$ என்னும் நியமத்தால் அமைவுறும் வளைவரை யுருவத்தின் போக்கு அல்லது மதிப்பு மாற்றத்தைக் கண்டறிக.

இச் சமன்பாட்டில் x, y களின் அடுக்குகள் இரட்டைப்படைகளாகும். ஆகவே, வரும் வளைவரையுருவம் இருவகை ஆயங்களைச் சூழ்ந்து சமச்சீராக (Symmetrical) ஒட்டி நிற்கும்.

$x=0$ என்று இட, $y=0$ என வரப் பெறுவோம். அஃதாவது, இவ்வுருவமானது y ஆயத்தை $(0, 0)$ என்னும் ஒரே இடத்தில் மட்டும் ஊடறுத்து நிற்பதாகும்.

$y=0$ என்று இட, $x=0$ என வரப்பெறுவோம்.

$a^2-x^2=0$ அல்லது $x=\pm a$ என்றும் கிடைக்கப் பெறுவோம். ஆகவே, நியமமுறும் உருவமானது x ஆயத்தை $(-a, 0)$; $(0, 0)$; $(a, 0)$ என்னுமிடங்களில் ஊடறுத்து நிற்பதாகும். அதனால், படத்தில் காட்டியபடி கண்ணறைகள் (loops) ஏற்படக் காண்போம்.



பயிற்சி 6 1

பின்வரும் சார்புகளுக்கேற்ற வரைப்படங்களை அமைக்க :

1. ஒருபடிச் சார்பு :

(i) $x+4$ (ii) $-x+3$ (iii) $2x-7$ (iv) $\frac{3x}{2}+5$

2. x ன் பலவுறுப்புக் கோவைகள் :

(a) x ன் இரட்டைப்படை யடுக்குள்ளவை : (i) x^2, (ii) $-x^2$ (iii) x^4, (iv) x^6

(b) xன் ஒற்றைப்படை யடுக்குள்ளவை (i) x^3, ii) $-x^3$, (iii) x^5

ஆங்காங்கு உன்னுடைய அநுமானங்களைக் குறிப்பிடுக.

(c) (i) x^2+3 (ii) $-x+4$ (iii) x^2-4x (iv) $3x-4x^2$

3. $5x-2x^2$ன் வரைப்படம் வரைந்து அதை உபயோகித்து

(i) $4x^2-10x-3=0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்க.

(ii) $2x^2-5x-c=0$ன் மூலங்கள் நிசராசிகளாதற்கு c ன் அதிகபட்ச மதிப்பைக் கண்டறிக.

4. பின்வரும் சார்புகளுக்கு வரைப்படங்களை அமைக்க.

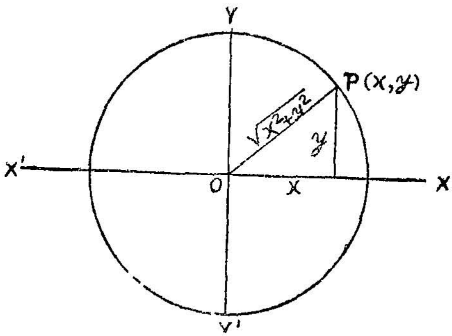
(i) $2x^2-x-6$ (ii) $3x-2x^2-7$ (iii) $2+3x-5x^2$ (iv) $3+4x-4x^2$ (v) $4-5x-3x^2$

5. $2x^2-x+5$ என்னும் கோவையின் வரைப்படத்தை அமைத்து அதைக்கொண்டு $6x^2-3x-5=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கண்டறிக.

6. (i) x ன் மதிப்புக்களுக்கு இடையே $39-4x-4x^2$ன் மதிப்பு தனராசியாதற்கு xன் மதிப்புக்களையும் (ii) மேற்கண்ட கோவையின் அதிகபட்ச மதிப்பையும் வரைப்பட மூலமாகக் கண்டறிக. இயல்கணித முறையில் நீ பெற்ற மதிப்புக்களைச் சரிபார்க்க.

7. (i) $y^2=4x$ (ii) $y^2=4(x-2)$ (iii) $y^2=4(x+1)$ (iv) $y^2=4(x-3)$ ஆகியவற்றிற்கு வரைப்படங்கள் வரைக.

8. $y=(x-2)(x-1)(x+2)$க்கு வரைப்படம் வரைக.



$x^2+y^2=9$ன் வரைப்படம்

$x^2+y^2=9$ ஆதலின், $\sqrt{x^2+y^2}=3$

அச்சுக்களின் பிறப்பிடத்திலிருந்து ஒரு புள்ளி (x, y)யின் தூரம் $\sqrt{x^2+y^2}$ ஆகும். கணக்கின்படி இத்தூரம் நிலையானதும் 3 அலகுகளுக்குச் சமமானதுமாகும். ஆகவே, கொடுத்த சம்பந்தத்திற்குப் பொருந்துவதாக அச்சுத் தூரங்களையுடைய ஒவ்வொரு புள்ளியும் நிலையான புள்ளி (0, 0) யிலிருந்து மாறாத 3 ஒன்றுகள் தூரத்தில் இருக்கின்றதாகும். ஆகவே, வரைப்படமானது பிறப்பிடத்தை மையமாகவும் 3 அலகுகள் (units) ஆரமாகவும் பெறுவதோர் வட்டமாகும்.

$(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$ன் வரைப்படம்

(x, y)யானது கொடுத்த சம்பந்தத்திற்குப் பொருந்தவருவதோர் புள்ளியானால், (3, 4)லிருந்து (x, y)ன் தூரம் 5 ஆகும். ஆகவே, வரைப்படமானது (3, 4)ஐ மையமாகக் கொண்டு 5 அலகுகள் ஆரம் பெற்றுள்ளதோர் வட்டமாகும்.

$x^2+y^2-2x-4y-11=0$ன் வரைப்படம்

கொடுத்த சம்பந்தத்தை $(x-1)^2+(y-2)^2=4^2$ என்று மாற்றி யெழுதினால், இஃது 1, 2 ஐ மையமாகவும் ஆரம் 4 அலகுகளாகவும் கொண்டுள்ளதொரு வட்டமாகும்.

பயிற்சி 6·2

வரைப்படங்கள் அமைக்க :

(i) $x^2+y^2=25$ (ii) $4x^2=9-4y^2$ (iii) $(x+1)^2+(y+2)^2=5$
(iv) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ (v) $2x^2+2y^2+6x+2y+1=0$
(vi) $x^2+y^2-8x+2y=0$.

பயிற்சி 6·3

வரைப்படங்கள் வரைக :

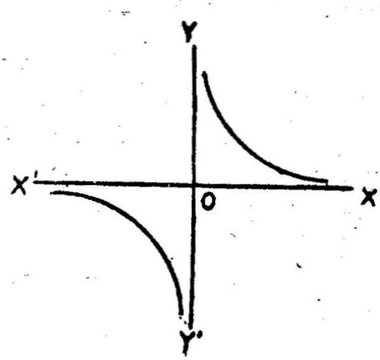
(i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ (ii) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (iii) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$\frac{y}{x}=\frac{a}{x}$ ன் வரைப்படம்

$y=\frac{3}{x}$ ன் வரைப்படத்தை வரைவோம்.

x, yன் ஒன்றொன்றற்கொன்று ஒத்துவரும் மதிப்புக்களின் அட்டவணை பின்வருமாறு :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$\to 0$	1	2	3	4	5	6
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	$\pm\infty$	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$



பின்வரும் குறிப்புக்களை நோக்குக :

(i) xன் மதிப்பை போதிய அளவுக்குச் சிறியதாக எடுக்க, $\frac{3}{x}$ ன் மதிப்பை நாம் விரும்பியபடியே பெரியதாக்கலாம்.

(ii) xன் மதிப்பு வளர வளர yன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போகின்றது. முடிவாக $x \to \infty$, $y \to 0$ வரையில்

(iii) (x, y) என்னும் புள்ளி வரைப்படத்தின் மேலிருந்தால், $(-x, -y)$ என்பதும் அவ்வரைப்படத்தின் மேலுள்ளதொரு புள்ளி யாகும்.

(iv) $x=0$க்கு ஒத்த யாதொரு புள்ளியும் வரைப்படத்தின் மேலில்லை.

குறிப்பு: (i) $y = -\frac{1}{x}$ ஆனது x அச்சைச்சூழ்ந்து, $y = \frac{1}{x}$ என்னும் வரைப்படத்தின் பிரதிவிம்பமாகும்.

(ii) n ஆனது யாதொரு ஒற்றைப்படை தன ராசியான முழு எண்ணுகியிருக்குங்கால் $y=\frac{a}{x^n}$ன் வரைப்படமானது $y=\frac{a}{x}$ வரைப்படத் தோடொத்த உருவுடையதாகும்.

பயிற்சி 6·4

விகிதச் சார்புகள் : (ஒரு விகிதச் சார்பானது இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் ஈவு ஆகும்.)

(i) $y=\frac{1}{x}$ (ii) $y=-\frac{1}{x}$ (iii) $y=\frac{1}{x^2}$ (iv) $y=-\frac{1}{x^3}$

(v) $y = \frac{1-x}{2x}$ (vi) $xy+y-2=0$ (vii) $y=\frac{x+1}{x-2}$ (viii) வரைப் படம் மூலமாகத் தீர்வு காண்க : $xy=9$; $5x+4y=29$.

பயிற்சி 6·5

பின்வரும் கோண கணிதச் சார்புகளுக்கு வரைப்படங்களை அமைக்க:

(i) நெடுக்கை (sine) x (ii) கிடக்கை (cos) x (iii) இருக்கை (tan) x (iv) எதிர் நெடுக்கை (cosec) x (v) எதிர்கிடக்கை (sec) x ;

(vi) எதிரிருக்கை (cot) x (vii) $y=4$ நெடுக்கை $(x-3)$ கிடக்கை x (viii) 5 நெடுக்கை $x+12$ கிடக்கை x (ix) கிடக்கை $x-$நெடுக்கை $2x$ (x) கிடக்கை $x-\frac{1}{2}$ நெடுக்கை $2x$.

VII இரு மாறிகளைக் கொண்ட ஏககால இருபடிச் சமன்பாடுகள்

(Simultaneous Quadratic Equatious in Two Variables)

மாணவர்கள் ஏற்கெனவே இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஏககால ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு அறியத் தெரிந்துள்ளனர். இந்த அத்தியாயத்தில், இரண்டு மாறிகளா லாகிய இருபடிச் சமன்பாடுகளை ஏககாலத்தில் தீர்வு காணும் முறைகளைக் காண்போம்.

வகை I

சமன்பாடுகளுள் ஒன்று ஒரு படியுடைய தாயபொழுது :

தீர்வு காண்க : $x-3y+1=0$; $x^2+xy-y^2-2x-1=0$.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து, $x=3y-1$ எனப் பெறுகின்றோம்.

இம்மதிப்பை இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பிரதியீடு செய்ய

$(3y-1)^2+(3y-1)\,y-y^2-2(3y-1)-1=0$

அஃதாவது, $11y^2-13y+2=0$

,, $(y-1)\,(11y-2)=0$

,, $y=1$ அல்லது $\frac{2}{11}$

$\therefore$ $x=2$ அல்லது $-\frac{5}{11}$

வகை II

தீர்வு காண்க : $6x^2-xy-12y^2=0$; $x^2+2y^2=\frac{17}{16}$

$6x^2-xy-12y^2=(3x+4y)\,(2x-3y)$

$\therefore$ $(3x+4y)\,(2x-3y)=0$

$\therefore$ $y=-\frac{3}{4}\,x$ அல்லது $\frac{2}{3}\,x$

இம் மதிப்புக்களை $x^2+2y^2=\frac{17}{16}$ல் பிரதியீடு செய்யுங்கால்

(i) $y=-\frac{3}{4}x$ என்று இட, $x^2+\frac{9}{8}x^2=\frac{17}{16}$ ஆம்.

அஃதாவது, $x^2=\frac{1}{2}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ எனப் பெறுகின்றோம்.

$\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ அல்லது $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆம். இவற்றிற்கு ஏற்ப முறையே $y=-\frac{3}{4\sqrt{2}}$ அல்லது $\frac{3}{4\sqrt{2}}$ ஆம்.

(ii) இனி, $y=\frac{2}{3}x$ என்னும் மற்றொரு மதிப்பைப் புகுத்த

$$x^2+\frac{8}{9}x^2=\frac{17}{16}$$

அஃதாவது $x^2=\frac{9}{16}=(\pm\frac{3}{4})^2$ என வரும்.

$\therefore$ $x=\frac{3}{4}$ அல்லது $-\frac{3}{4}$ ஆம்: இவற்றிற்கு ஏற்ப முறையே $y=\frac{1}{2}$ அல்லது $\frac{1}{2}$ ஆம்.

வகை 3

இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் ஒரு படியுள்ள உறுப்புக்கள் வாரா விடத்துச் செய்வகையாமாறு :

தீர்வுகாண்க :

$$2x^2-3xy+2y^2=8 \qquad \text{(i)}$$

$$x^2-3xy+y^2=-5 \qquad \text{(ii)}$$

முதல் சமன்பாட்டை 5 ஆலும், இரண்டாவது சமன்பாட்டை 8 ஆலும் பெருக்கி, வரும் இரண்டு பெருக்கற் பலன்களையும் கூட்ட

$$18x^2-39xy+18y^2=0 \text{ ஆம்}$$

அஃதாவது, $3(3x-2y)(2x-3y)=0$.

$\therefore\ x=\frac{3}{2}y$ அல்லது $\frac{2}{3}y$ ஆம்.

இரண்டாவது சமன்பாட்டில் $x=\frac{2}{3}y$ என்று பிரதியிட, $y^2=9$ எனப்பெறுகின்றோம்.

$\therefore\ y=\pm3$ ஆம். இதுபற்றி, $x=\pm2$ ஆம்,

மேல், அதே சமன்பாட்டில் $x=\frac{3}{2}y$ என்று பிரதியிட, $y^2=4$ எனப் பெறுகின்றோம்.

$\therefore \quad y=\pm 2$ ஆம் ; இதற்கேற்ப $x=\pm 3$ ஆம்.

இவ்வாறு பெற்று நின்ற இணைமதிப்புக்களாமாறு :

x	2	-2	3	-3	
y	3	-3	2	-2	

மறுவழி :

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிலும் $y=vx$ என்றிடுக. பிறகு வகுத்தல் செய்கையால், $\dfrac{2-3v+2v^2}{1-3v+v^2}=-\dfrac{8}{5}$ ஆம்.

இது $18v^2-39v+18=0$ ஆம். இதிலிருந்து $v=\frac{2}{3}$ அல்லது $\frac{3}{2}$ எனவரும். அதுபற்றி $y=\frac{2}{3}x$ அல்லது $\frac{3}{2}x$ ஆகும். எஞ்சிய செய்கை வகை மேற்காட்டியவாறேயாம்.

வகை 4.

சமன்பாடுகள் சமச்சீராய் உள்ள பொழுது செய்வகையாமாறு :

தீர்க்க ;

$$2(x^2+y^2)-3(x+y)=-1 \quad \text{......(1)}$$
$$3x^2+4xy+3y^2=3. \quad \text{......(2)}$$

$x=u+v$ என்றும் $y=u-v$ என்றும் பிரதியிட்டால்

முதல் சமன்பாடு $4(u^2+v^2)-6u=-1$ ஆம்.

$$\therefore \quad 4v^2=6u-1-4u^2 \quad \text{......(3)}$$

இரண்டாம் சமன்பாடு $10u^2+2v^2=3$ ஆம்.

$\therefore \qquad 20u^2+4v^2=6 \qquad \ldots(4)$

(3), (4) களிலிருந்து $20u^2+(6u-1-4u^2)=6$

அஃதாவது, $16u^2+6u-7=0$;

,, $(8u+7)(2u-1)=0$

$\therefore \quad u=\frac{1}{2}$ அல்லது $-\frac{7}{8}$ ஆம்

(3) லிருந்து, v ன் மதிப்பை யறிந்து, அதன் பிறகு x, y களின் மதிப்பை யறியலாகும்.

வகை 5.

தெரிந்த முற்றொருமைகளை யொட்டித் தீர்வுகாணும் நிலைகள் :

தீர்க்க :

$$x+y=6 \qquad (1)$$

$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440 \qquad (2)$$

$x+y=6$ ஆதலின், $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=36-2xy$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=216-18xy$$

$$\therefore \qquad (36-2xy)(216-18\,xy)=1440$$

$$2(18-xy)\,.\,18(12-xy)=1440$$

$$36(18-xy)(12-xy)=1440$$

$$(18-xy)(12-xy)=40.$$

$$\therefore \qquad x^2y^2-30xy+176=0$$

அஃதாவது, $(xy-8)(xy-22)=0$

$\therefore \qquad xy=8$ அல்லது 22 ஆம்.

ஆகவே, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=36-32=4$ அல்லது

$=36-88=-52$ ஆம்.

$\therefore \quad x-y=\pm\sqrt{4}$ அல்லது $\pm\sqrt{-52}$ (இது கற்பனையாதலின் செல்லாது) $x-y=\pm 2$ என்பதே ஏற்புடைத்தாகும்,

இனி $x+y=6$; $x-y=\pm 2$ எனப்பெறும்,

இவற்ருல் $x=\dfrac{6\pm 2}{2}=4$ அல்லது 2 ஆம்

$y=\dfrac{6\mp 2}{2}=2$ அல்லது 4 ஆம்.

பல்கலைக்கழக மாதிரி வினக்கள்

1. விடுவிக்க : $x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1$

$x^2-4y^2+x+3y=2x-y$ ஆதலின்,

$x^2-x-4y^2+4y=0$ ஆம்.

அஃதாவது, $x^2-x-4y(y-1)=0$ (i)

$2x-y=1$ என்றதிலிருந்து $y=2x-1$ என்றறிகின்ருேம்.

y க்கு உரிய இம்மதிப்பை (i) ல் பிரதியிட

$x^2-x-4(2x-1)(2x-2)=0$ ஆகும்.

அஃதாவது, $x^2-x-16x^2+24x-8=0$

,, $15x^2-23x+8=0$

,, $(x-1)(15x-8)=0$

$\therefore$ $x=1$ அல்லது $\frac{8}{15}$ ஆம்.

இனி, $y=2x-1$ ஆதலின், x ன் மதிப்புக்களுக்கு ஏற்ப

$y=1$ அல்லது $\frac{1}{15}$ ஆகும்.

$\therefore$ $x=1$ அல்லது $\frac{8}{15}$; $y=1$ அல்லது $\frac{1}{15}$ ஆம்.

2. விடுவிக்க :

$x^2+y^2+x+y=18$; $xy=6$.

[விடை ;

$x^2+y^2+x+y=18$ (1)

$xy=2$ (2)

(1) + (2) $\times$ 2 படி

$x^2+y^2+x+y+2xy=18+2$ ஆம்.

$\therefore$ $(x+y)^2+(x+y)=30$; அல்லது $(x+y)^2+(x+y)-3=00$,

அஃதாவது, $(x+y)^2+6(x+y)-5(x+y)-30=0$

$\therefore \quad (x+y+6)(x+y-5)=0.$

$\therefore \quad x+y=5$ அல்லது -6 ஆம்.

முதல்வகை

$x+y=5$ என்றதலிருந்து $y=5-x$ ஆம்.

இதை (2) ல் பிரதியிட, $x(5-x)=6$ ஆம்

$\therefore \quad x^2-5x+6=0$, அஃதாவது $(x-2)(x-3)=0$;

$\therefore \quad x=2$ அல்லது 3; $y=3$ அல்லது 2 ஆம்.

வகை 2

$x+y=-6$ ஆதலால், $y=-6-x$ எனக்கிடைக்கும்.

இதை (2) ல் பிரதியிட, $x(-6-x)=6$ ஆம்.

$$\therefore \quad x^2+6x+6=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-6+\sqrt{36-24}}{2}=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{2}=-3\pm\sqrt{3}$$

இனி

$x=-3\pm\sqrt{3}$ ஆகவே

$y=-6-[-3\pm\sqrt{3}]=-3\pm\sqrt{3}$ ஆம்.

இங்கு

x	2	3	$-3+\sqrt{3}$	$-3-\sqrt{3}$
y	3	2	$-3-\sqrt{3}$	$-3+\sqrt{3}$

என x, yக்களின் மதிப்புக்கள் இயைபுற்று நிற்குமாறறிக.

3. தீர்க்க :

$x+y+1=0 \qquad (1)$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$; $\qquad (2)$

(2) ல் இருந்து, $\frac{y+x}{xy} = \frac{1}{12}$

$\therefore \quad xy = 12(x+y) = 12(-1)$ [(1) ஐப் பயன்படுத்த]

$= -12$

(1) ல் இருந்து $x+y=-1$

$\therefore \quad (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$

$= (-1)^2 - 4(-12) = 1+48 = 49$

$\therefore \quad x-y = \pm 7$ ஆம்.

இனி, $\left.\begin{array}{r} x-y=7 \\ x+y=-1 \end{array}\right]$ என்று எடுத்துக்கொள்ள

கூட்டுதலால் $2x=6$ அஃதாவது $x=3$ ஆம்

அதுபற்றி $y=-1-x=-1-3=-4$ ஆம்.

மேல், $\left.\begin{array}{r} x-y=-7 \\ x+y=-1 \end{array}\right]$ என்று எடுத்துக்கொள்ள

கூட்டுதலால் $2x=-8$; அஃதாவது $x=-4$ ஆம்.

அதுபற்றி $y=-1-x=-1+4=+3$ ஆம்.

ஆகவே, $x=3$ ஆனல், $y=-4$ ஆம்

$x=-4$,, $y=+3$ ஆம்

பயிற்சி 7

1. $2x+3y=5$; $x^2-2xy-3y^2+5y-4=0$

2. $x+y=2$; $x^2+xy+y^2+x+y=5$

3. $4x^2+4y^2-4x+12y+1=0$; $2x^2-xy-3y^2=0$

4. $8x^2-6xy+y^2=0$; $x^2+y^2+x=6$

5. $x^3+y^3=117$; $x^2-xy+y^2=39$

6. $x^2+xy+4y^2=6$; $3x^2+8y^2=14$

7. $x^2-xy+2y^2=16$; $2x^2+3xy-y^2=2$

8. $x+y=2$; $x^5+y^5=32$

9. $x^2+y^2+3(x+y)-4=0$; $3(x^2+y^2)+4xy=3$

10. $x^2+y^2+x+y=18$; $xy=6$

11. $x^2+xy+x=14$; $y^2+xy+y=28$

12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$; $x^2-y^2=\frac{5xy}{2}$

13. $3x^2+2xy+3=0$; $5x^2-3xy-14=0$

14. $x+y=5$; $x^3+y^3=35$

15. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$; $6xy=1$

16. $x^2+3y^2=28$; $xy=3$

17. $x^2+xy=4$; $y^2+xy=5$

18. $x^4+x^2y^2+y^4=91$; $x^2+xy+y^2=13$

19. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$; $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16}$

20. $x+\frac{3}{y}=2$; $y+\frac{3}{x}=-2$

21. $xy+\frac{x}{y}=10$; $xy^2-x=6y$

22. $(x-2)(x+6)(x+1)(x+3)+56=0$

23. $x^2-xy=14$; $y^2+xy=60$.

VIII. விருத்திகள் அல்லது தொடர்கள் (Progressions)

I. கூட்டுவிருத்தி (Arithmetic Progression) : கூட்டுத்தொடர் :

1. உறுப்புக்களின் தொடரொன்று தன்னகத்திலுள்ள யாதோர் உறுப்புக்கும் அதன்மேல் நிற்கும் உறுப்புக்குமுள்ள வித்தியாசம் யாங்கணும் ஒரே மாதிரியாய் மாறுபடாமல் இருக்கும்படி அமைந்திருக்குமாயின் அது கூட்டுவிருத்தி (Arithmetical Progression) எனப்படும் மாறுபடாத அவ்வித்தியாசம் அக்கூட்டு விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் (Common Difference) என வழங்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகளாக,

2, 5, 8, 11........... என்னும் கூட்டுவிருத்தியானது பொது வித்தியாசம் 3 ஐ உடையதாகும்.

$-3, -7, -11$...........என்னும் கூட்டுவிருத்தியானது -4 ஐப் பொது வித்தியாசமாகக் கொண்டு அமைந்துள்ளதாகும்,

a, b, c, d முதலியன கூட்டுவிருத்தியில் தொடருற்று நிற்பனவானால்,

(i) $b-a=c-b=d-c=\ldots\ldots=$ பொது வித்தியாசமாம்.

(ii) $a+x, b+x, c+x\ldots\ldots$ ஆவனவும் கூட்டுவிருத்திக்குரியவாம்

(iii) $a-x, b-x, c-x,\ldots\ldots$,, ,,

(iv) $ax, bx, cx,\ldots\ldots$,, ,,

(v) $\frac{a}{x}; \frac{b}{x}, \frac{c}{x},\ldots\ldots$,, ,,

2. **கூட்டுவிருத்தியின் நியமரூபம் :**

'a' முதலுறுப்பும், 'd' பொது வித்தியாசமுமானால் கூட்டு விருத்தியின் நியமரூபம் $a, a+d, a+2d, a+3d\ldots\ldots$ ஆம்.

3. கூட்டுவிருத்தியின் n ஆவது உறுப்பு.

n ஆவது உறுப்பை b என்று குறிப்பிட்டுக்கொண்டால், $b=a+(n-1)d$ ஆம்.

4. கூட்டுவிருத்தியின் இடைநிலையுறுப்பு:

மூன்று பரிமாணங்கள் கூட்டுவிருத்தியில் அமைவுற்றால், நடுவே யுள்ளது ஏனைய இரண்டின் கூட்டு இடையுறுப்பு (Mean) எனப்படும்.

a, A, b என்பன கூட்டுவிருத்திக்கு உரியவையானால், a க்கும் b க்கும் நடுவுறும் A ஆனது அவற்றின் இடைநிலை யுறுப்பெனப்படும்.

அப்பொழுது, $A-a=b-A$ (விவரணப்படி)

$\therefore \quad 2A=a+b$

$\therefore \quad A=\frac{a+b}{2}$ ஆம்.

5. கூட்டு விருத்தி இடையுறுப்புக்கள் (Arithmetic means):

யாதோர் எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்கள் கூட்டுவிருத்தியில் அமைந்து கிடந்தால், முதலுறுப்புக்கும் இறுதியுறுப்புக்கும் நடுவே கிடப்பனவெல்லாம் முனையுறுப்புக்களின் (Extreme terms) கூட்டு விருத்தி இடையுறுப்புக்களெனப்படும்.

$a, \ a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots\ldots a_n, \ b$ என்பன கூட்டுவிருத்தியிலிருந்தால், $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பன aக்கும் bக்கும் நடுவே உள்ள இடையுறுப்புக்கள் எனப்படும்.

(உதாரணம்) 2, 5, 8, 11, 14, 17 என்னும் கூட்டுவிருத்தியில், 5, 8, 11, 14 என்பன 2க்கும் 17க்கும் நடுவே உள்ள இடையுறுப்புக்களாகும்.

பயிற்சி: 3க்கும், 12க்கும் இடையில் 5 கூட்டுவிருத்தி இடை உறுப்புக்களை நிர்ணயிக்க:

6. aக்கும் bக்கும் இடையே n கூட்டு விருத்தி இடையுறுப்புக்களை அமைத்தல்

இடையுறுப்புக்கள், $a_1, \ a_2 \ldots\ldots a_n$ என்பனவாகுக.

அப்பொழுது $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, b$ என்பன கூட்டுவிருத்தியை அமைக்கும்.

இதிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை $(n+2)$ ஆம்.

கூட்டுவிருத்தியின் பொதுவித்தியாசம் d ஆகுக.

அப்பொழுது கூட்டுவிருத்தியின் $(n+2)$ ஆவது உறுப்பு

$$=a+(n+2-1)d$$
$$=a+(n+1)d \text{ ஆம்.}$$

ஆனால், $(n+2)$ ஆவது உறுப்பு$=b$ ஆகும்.

$$\therefore \quad a+(n+1)d=b$$

$$\therefore \quad (n+1)d=b-a$$

$$\therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}$$

$\therefore$ முதல் இடையுறுப்பு$=a+d=a+\dfrac{b-a}{n+1}=\dfrac{na+b}{n+1}$

இரண்டாம் இடையுறுப்பு$=a+2d=a+\dfrac{2(b-a)}{n+1}=\dfrac{(n-1)a+2b}{n+1}$

r ஆவது இடையுறுப்பு$=a+rd=a+\dfrac{r(b-a)}{n+1}=\dfrac{(n-r+1)a+rb}{n+1}$

n ஆவது இடையுறுப்பு$=a+nd=\dfrac{a+n(b-a)}{n+1}=\dfrac{a+nb}{n+1}$

7. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுப்பலன்.

a, முதலுறுப்பாகவும், d, பொதுவித்தியாச மாகவும், l, இறுதி யுறுப்பாகவும் கொள்க. முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுப்பலனை S எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அப்பொழுது, $S=a+(a+d)+(a+2d)\ldots\ldots(l-2d)+(l-d)+l$ ஆம்.

இத் தொடரைக் கடைதலையாக மறித்து எழுதினல்

$$S=l+(l-d)+(l-2d)\ldots\ldots(a+2d)+(a+d)+a \text{ ஆம்.}$$

இவற்றைக் கூட்ட $2S=(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots n$ உறுப்புகள் வரை.

$$=n(a+l)$$

$$\therefore \quad S=\frac{n(a+l)}{2}$$

$l=a+(n-1)d$ என்று அமைக்க

$$S=\frac{n}{2}\ \{2a+(n-1)d\} \text{ ஆம்}$$

கிளை :

1. முதல் n இயற்கை எண்களின் கூட்டுப்பலன் $=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. முதல் n அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களின் கூட்டுப் பலன் $=n^2$

3. முதல் n அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் கூட்டுப் பலன் $=n(n+1)$ ஆம்

விளக்க மாதிரிகள் :

1. ஒரு கூட்டுவிருத்தியின் முதலுறுப்பு 5, உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 15, உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 390. பொது வித்தியாசத்தையும், நடு உறுப்பையும் காண்க :

$$\frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d]=S$$

கொடுத்துள்ள மதிப்புக்களை பிரதியிட,

$$\tfrac{15}{2}\ [2\times 5+(15-1)d]=390 \quad \text{ஆம்.}$$

$$105d=315 \quad ,,$$

$$\therefore \quad d=3 \quad ,,$$

நடு உறுப்பு 8ஆவது உறுப்பாகும்.

,, 8 ஆவது உறுப்பு $=a+(n-1)d=5+(8-1)\times 3=26$ ஆம்

2. கூட்டு விருத்தியிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 21 ஆகும். அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 179 ஆகும் எனின் அவற்றைக் கண்டறிக.

மூன்று எண்களை $a-d$, a, $a+d$ ஆகக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad a-d \;\; a+a \;\; d=21 \qquad \therefore \; a=7.$

மேலும், $(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=179$

அல்லது $2(a^2+d^2)+a^2=179$

அஃதாவது $2[49+d^2]+49=179$

$\therefore \quad d=\pm 4$

$\therefore$ வேண்டிய எண்கள் 3, 7, 11 ஆகும்.

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினக்கள்

1. 500 க்கும் 1000 க்கும் இடையில் 13 ஆல் வகுபடக் கிடக்கும் எல்லா இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகையை அறிக.

விடை :

500 க்கும் 1000 க்கும் இடையே 13 ஆல் வகுபடக் கூடிய முதலெண் 507 ம், இறுதியெண் 988 ம் ஆகும். பெறவேண்டிய கூட்டுத்தொகை S என்க.]

இனி, $S=507+520+ \ldots\ldots 988$ ஆம்

இங்கு $a=507$, $d=13$, $l=988$ ஆம்

$l=a+(n-1)d$ என்றறிவோம்

ஆதலின், $988=507+(n-1)13$

$=507+13n-13$

$$\therefore \quad n=\frac{988-507}{13}+1=38$$

இதனுல் கூட்டுதற்குரிய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 38 ஆதல் பெறப்படும்.

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{38}{2}(507+988)$$

$=19\times 1495$

$=\mathbf{28405}.$

2. $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_4 a} + \frac{1}{\log_8 a} + \frac{1}{\log_{16} a} + \ldots\ldots$ என்னும் தொடர் வரிசையில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டறிக :

$\frac{1}{\log_2 a} = \log_a 2$ என்பதையறிவோம் $[\log_a b + \log_b a = 1$ ஆதலின்$]$

இவ்வாறே, $\frac{1}{\log_4 a} = \log_a 4$ ஆம். ஏனையவும் இங்ஙனமே கொள்ளப்படும்.

கொடுத்த தொடர்வரிசை $\log_a 2 + \log_a 4 + \ldots\ldots$ என அமைவுறும்.

இதனை $\log_a 2 + \log_a 2^2 + \log_a 2^3 + \ldots\ldots$ என எழுதலாம்.

இதன் மதிப்பு $= \log_a 2 + 2\log_a 2 + 3\log_a 2 \ldots\ldots$ n உறுப்புக்களுக்கு

$= \log_a 2(1+2+3+\ldots\ldots$ n உறுப்புகளுக்கு$)$

$$= \log_a 2 \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \log_a 2$$

பயிற்சி 8·1

1. (i) 3 க்கும் 21 க்கும் இடையில் 5 கூட்டு இடையுறுப்புக்களையும் (ii) 51 க்கும் 7 க்கும் இடையில் 10 கூட்டு இடையுறுப்புக்களையும் (iii) $\frac{1}{4}$ க்கும் $-7\frac{3}{4}$ க்கும் இடையில் 15 கூட்டு இடையுறுப்புக்களையும் இடுக.

2. பின்வரும் தொடர்வரிசையின் கூட்டுத்தொகையைக் கணக்கிடுக.

(i) 2, 5, 8 ...... 20 உறுப்புக்களுக்கு

[விடை : 590]

(ii) 55, 51, 47 ...... 10 உறுப்புக்களுக்கு

[விடை : 370]

(iii) $6\frac{3}{4}$, 8, $9\frac{1}{4}$ ....., 16 உறுப்புக்களுக்கு

[விடை : 258]

3. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் 2 முதலுறுப்பாகும்; இறுதியுறுப்பு 29 ஆகும்; கூட்டுத்தொகை 155 ஆகும்; அதன் பொதுவித்தியாசத்தை யறிக.

[விடை : 3]

4. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் 13 வது உறுப்பு 3 ஆகும் ; முதல் 13 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 234 ஆகும். அதன் பொது வித்தியாசத்தையும், முதல் 25 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையையுங் கண்டறிக.

[விடை : $-\frac{5}{2}$, 75]

5. ஒரு கூட்டுவிருத்தியின் 44 ஆவதும் 4 வதுமான உறுப்புக்கள் —51 ம், 29 ம் ஆனல், 17 ஆவது உறுப்பை அறிக.

[விடை : 3]

6. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் 16 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 400 ; பொது வித்தியாசம் $=2\frac{2}{3}$. எனின், முதலுறுப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : 5]

7. ஒரு கூட்டுவிருத்தியின் முதலுறுப்பு 4, இறுதியுறுப்பு 96, உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 400 ; என்றுல், அவ்விருத்தியில் இடம் பெறும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையையும், பொதுவித்தியாசத்தையும் கண்டறிக.

[விடை : 8, $9\frac{2}{7}$]

8. 25, 21, 17 ...... என்ற தொடர்வரிசையில் கூட்டுத்தொகை 70 ஆதற்கு எத்தனை வுறுப்புக்களைக் கொளலாகுமென்று கண்டறிக.

[விடை : 10]

9, —6, —3, ... என்னும் தொடர்வரிசையில் எத்தனை யுறுப்புக்களை எடுத்துக்கொண்டால் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை 75 ஆகும்.

[விடை : 10]

10. $100+99+98+97$ ...... என்னும் தொடர்வரிசையில் நான் அடுத்தடுத்து நிற்கும் 30 உறுப்புக்களை யெடுத்துக்கொள்ளக் கருது

கிறேன். நான் எந்த உறுப்பு முதலாக ஆரம்பித்து எடுத்துக்கொண்டு கூட்டினால், கூட்டுத்தொகை 1155 ஆகும்.

[விடை : 53]

11. 500க்கும் 1000க்கும் இடையே நிற்கும் இயற்கை எண்களுள் 7-ஆல் வகுபடுவனவற்றின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

[விடை : 53179]

12. 300க்கும் 500க்கும் இடையேயுள்ள ஒற்றைப்படையெண் களின் கூட்டுத்தொகையைக் கணக்கிடுக.

[விடை : 10000]

13. ஒரு கூட்டல் விருத்திக்குரிய வுறுப்பின் பொது வடிவம் $3n+1$ ஆகும். அவ் விருத்தியின் தொடர்வரிசையையும், 15 உறுப்புக் களின் கூட்டுத்தொகையையும், n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை யையும் கண்டறிக.

[விடை : 4, 7, 10......; $n(3n+5)/2$]

14. ஒரு தொடர்வரிசையிலுள்ள n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $5n^2-3n$ ஆம். அத் தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுவிருத்தி யாகுமென நிரூபிக்க. அவ வரிசையையும், r ஆவது உறுப்பையும் கண்டறிக.

[விடை : 2, 12, 22, ...: $10r-8$]

15. b, c க்கள் மாறிகளா யிருக்க, ஒரு தொடர் வரிசையில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை bn^2+cn ஆகும். அத்தொடர் வரிசை ஒரு கூட்டுவிருத்தியாகுமெனக் காட்டி, அதன் முதலுறுப் பையும் பொது வித்தியாசத்தையுங் கண்டறிக.

[விடை : $b+c$; $2b$]

16. ஒரு கூட்டுவிருத்தியிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை 9 ஆகும். அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 35 ஆகும், எனின் அவற்றைக் கண்டறிக,

[விடை : 1, 3, 5]

17. ஒரு கூட்டுவிருத்தியிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 15ம், பெருக்கற்பலன் 80ம் ஆமெனின் அவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : 2, 5, 8]

18. ஒரு கூட்டுவிருத்தியிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 12 ஆம் ; அவற்றது கனங்களின் கூட்டுத்தொகை=288 ஆமெனின், அவற்றை அறிக.

[விடை : 24, 6]

19. ஒரு கூட்டுவிருத்தியிலுள்ள நான்கு முழு எண்களின் கூட்டுத் தொகை 22, அவற்றின் பெருக்கற் பலன் = 280. அவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : 1, 4, 7, 10]

20. ஒரு கூட்டுவிருத்தியின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது வுறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R என்பனவாயின், $(q-r)P+(r-p)Q+(p-q)R=0$ என்று காட்டுக.

21. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் 11 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 121 ஆகும் ; 19 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 361 ஆகும் ; என்றல், n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

[விடை : n^2]

22. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் p ஆவது உறுப்பு P ம், q ஆவது உறுப்பு Q ம் ஆமெனின், அதன் முதலுறுப்பையும் பொதுவித்தியாசத் தையும் கண்டறிக.

23. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் p ஆவது உறுப்பு 'a' யும், q ஆவது உறுப்பு 'b' யும் ஆனல், முதல் $(p+q)$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{p+q}{2}\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$ ஆமென்று நிரூபி.

24. ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் p உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை q ம், q உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை p ம் ஆனல், (i) $(p+q)$ ஆவது உறுப்பையும் (ii) $(p+q)$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க,

25. a, b, c க்கள் கூட்டுவிருத்தியிலிருந்தால், $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ என்பனவும் கூட்டுவிருத்தியில் இருக்குமெனக்காட்டுக.

26. $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ என்பன கூட்டுவிருத்தியிலிருந்தால், a^2, b^2, c^2 என்பனவும் கூட்டுவிருத்தியில் நிற்பனவாகுமெனக் காட்டுக.

27. இரண்டு கூட்டுவிருத்திகளுக்குரிய n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $7n+2 : n+4$ என்ற விகிதத்திலிருக்கின்றன. அவற்றின் 5 வது உறுப்புக்களுக்குள்ள விகிதத்தை யறிக.

[விடை : 5 : 1]

28. இரண்டு கூட்டுவிருத்திகளுக்குரிய n உறுப்புக்களின் கூட்டுப் பலன் $2n+1 : 3n+5$ என்னும் விகிதத்தில் இருந்தால், அவற்றின் 11 வ்து உறுப்புக்களின் விகிதத்தை யறிக.

[விடை : 43 : 68]

29. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்குரிய மூலங்கள் சமராசிகளானல், a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் நிற்பனவாமெனக் காட்டுக.

30. இயற்கை எண்களின் தொடர்வரிசை யானது பின்வருமாறு தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன :

(1, 2) ; (3, 4, 5, 6) ; (7, 8, 9, 10, 11, 12) ... பிறவும் இவ்வாறே யாம். இவற்றில் n ஆவ்து தொகுதியிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை $n(2n^2+1)$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(31) இயற்கை எண்கள் பின்வரும் தொகுதிகளாக வரிசைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

(1), (2, 3) ; (4, 5, 6) ; (7, 8, 9, 10) ...... இங்ஙனமாக. இவற்றில் n ஆவது தொகுப்பிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

[விடை ; $n(n^2+1)/2$)

32. ஒற்றைப்படை யெண்கள் பின்வருமாறு தொகுப்புச் செய்யப் பட்டன : (1, 3) ; (5, 7, 9, 11) ; (13, 15, 17, 19, 21, 23) .....,

இங்ஙனமாகியவற்றுள், n ஆவது தொகுப்பிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டறிக. இதனால், முதல் n இயற்கை எண்களின் கனமானது (cubes) அவற்றின் கூட்டுத்தொகையின் வர்க்கமாகுமெனக் கண்டறிக.

[விடை : $4n^2$]

33. S_p, S_q, S_r என்பன ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் p, q, r உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைகளாமெனின், $S_q \cdot \frac{q-r}{p} + Sq \cdot \frac{r-p}{q} + S_r \cdot \frac{p-q}{r} = 0$ என்று நிருபிக்க.

34. (i) $8-11+14-17$ ...... n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ii) $-44-41-38$ ...... என்னும் வரிசையில் 0 ஒரு உறுப்பாயுள்ளதா ?

(iii) $7+10+13+$ ...... ம், $10+14+18+$ ...... ம், 50 உறுப்புக்களுக்குத் தொடரப்பட்டால் எத்தனை யுறுப்புக்கள் இரண்டு வரிசைகளிலும் ஒருங்கொத்து (identical)க் காணப்படும் ?

35. p கூட்டு விருத்திகளின் தனித்தனிக் கூட்டுப்பலன்கள் $S_1+S_2+S_3$ ...... Sp ஆம் ; அவற்றின் முதலுறுப்புக்கள் முறையே 1, 2, 3 ...... p என்பனவாம் ; அவற்றின் பொது வித்தியாசங்கள் முறையே 1, 3, 5 ...... $(2p-1)$ ஆகும் ; என்றால் $S_1+S_2+S_3+$ ...... $+Sp=\frac{1}{2}(np+1)$ என்று காட்டுக.

11 ஹார்மோனிக் விருத்தி (Harmonic progression)

(விலோமக் கூட்டுவிருத்தி)

[இசைத்தொடர்]

1. வரையறை : பரிமாணங்களின் விலோமங்கள் (Reciprocals) கூட்டு விருத்தியமைப்பில் நின்றால் அப்பரிமாணங்களின் தொடருக்கு ஹார்மோனிக் விருத்தி அல்லது விலோமக் கூட்டுவிருத்தி எனப்படும்.

(உ-ம்) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ ...... ஹார்மோனிக் விருத்தியிலுள்ளனவாம்.

அவற்றின் விலோமங்களாகிய 3, 5, 7 ... என்பன கூட்டு விருத்தியில் அமையுமாறறிக.

2. a, b, c என்பன ஹா. வி. (H. P.)ல் இருந்தால், அப்பொழுது

$$\text{(i)} \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ ஆம்,} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c} \text{ ஆம்.}$$

யாங்ஙனமெனின் a, b, c ஹா. வி யில் இருந்தால் $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ கூ. வி (A. P.) யிலிருக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \quad \text{(i)} \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ அல்லது } b = \frac{2ac}{a+c} \text{ ஆம்.}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{a-b}{ab} = \frac{b-c}{bc} \quad \therefore \quad \frac{a-b}{b-c} = \frac{bc}{ab} = \frac{c}{a} \text{ ஆம்}$$

3. **ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்கள் (Harmonic means) :**

(i) மூன்று பரிமாணங்கள் ஹார்மோனிக் விருத்தியிலிருந்தால் அவற்றின் நடுவுறுப்பானது ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பு (mean) எனப்படும்.

a, b என்னும் இரண்டு பரிமாணங்களின் ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பு $\frac{2ab}{a+b}$ ஆம். எவ்வாறெனில், H ஆனது a, bக்களின் ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பானால், அப்பொழுது a, H, bக்கள் ஹார்மோனிக் விருத்திக்குரிய தொடர்நிலையைப் பெறும். ஆகவே,

$\frac{1}{a}, \frac{1}{\text{H}}, \frac{1}{b}$ என்பன கூட்டு விருத்தியில் இருப்பனவாம்.

$$\frac{1}{\text{H}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{\text{H}}$$

$$\therefore \qquad \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\therefore \qquad H=\frac{2ab}{a+b}$$

(ii) யாதானுமொரு எண்ணிக்கையுள்ள பரிமாணங்கள் ஹார்மோனிக் விருத்தியிருந்தால், முதலுறுப்புக்கும், இறுதியுறுப்புக்கும் நடுவே இருப்பனவெல்லாம் முனையுறுப்புக்களின் ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்க ளெனப்படும்.

4. a, b க்களுக்கு இடையில் n ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்களை அமைத்தல் :

n ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்கள் $h_1, h_2, h_3 \dots\dots h_n$ ஆகுக.

அப்பொழுது $a, h_1, h_2 \dots\dots h_n, b$ என்பன ஹா. வி. யிலுள்ள $(n+2)$ உறுப்புக்களாம்.

$\therefore \quad \frac{1}{a}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2} \dots\dots \frac{1}{h_n}, \frac{1}{b}$ கூ. வி. (A·p) யிலுள்ளன வாகும்.

இக்கூட்டுவிருத்தியில் பொது வித்தியாசம் d ஆனல், அப்பொழுது $\frac{1}{a}$ ஐ முதலுறுப்பாகவும், d ஐப் பொதுவித்தியாசமாகவு முடைய கூட்டுவிருத்தியில் $\frac{1}{b}$ என்பது $(n+2)$ ஆவது உறுப்பாகும்.

கூ. வி. யில் $(n+2)$ ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{a}+(n+1)d$ ஆகும்.

$(n+2)$ ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{b}$ ஆக வுள்ளது.

$$\therefore \qquad \frac{1}{a}+(n+1)d=\frac{1}{b}$$

$$\therefore \quad (n+1)d=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab} \qquad \therefore \quad d=\frac{a-b}{(n+1)ab}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{h_1}=\frac{1}{a}+d=\frac{1}{a}+\frac{a-b}{(n+1)ab}=\frac{b(n+1)+(a-b)}{ab(n+1)}=\frac{a+nb}{ab(n+1)}$$

$$\frac{1}{h_2}=\frac{1}{a}+2d=\frac{1}{a}+\frac{2(a-b)}{(n+1)ab}=\frac{b(n+1)2+(a-b)}{ab(n+1)}=\frac{2a+(n-1)b}{ab(n+1)}$$

$\frac{1}{h_r}=$ $=[ra+(n-r+1)b]/ab(n$

$$\frac{1}{h_n}=\frac{1}{a}+nd=\frac{1}{a}+\frac{n(a-b)}{ab(n+1)}=\frac{b(n+1)+n(a-b)}{ab(n+1)}=\frac{na+b}{ab(n+1)}$$

$$\therefore\quad h_1=\frac{ab(n+1)}{a+nb};\ h_2=\frac{ab(n+1)}{2a+(n-1)b};\ \cdots\quad;\ h_n=\frac{ab(n+1)}{na+b}.$$

5. விளக்க உதாரணம் :

ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் P, Q, R என்பன முறையே p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்களானல்,

$PQ(p-q)+QR(q-r)+RP(r-p)=0$ என்று நிரூபி :

விடை :

P, Q, R ஹா. வி. யில் நிற்றலால், $\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{R}$ கூ. வி. (A.P) யிலிருக்கும். இக் கூட்டுவிருத்தியில் 'a' முதலுறுப்பும், d பொது வித்தியாசமும் ஆமெனின்,

அப்பொழுது

$$a+(p-1)d=\frac{1}{P} \quad (1);$$

$$a+(q-1)d=\frac{1}{Q} \quad (2):$$

$$a+(r-1)d=\frac{1}{R} \quad (3) \text{ ஆம்}$$

ஆகவே, (1)—(2) ஆல் $(p-q)d=\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}=\frac{Q-P}{PQ}$ ஆம்.

$\therefore$ $PQ(p-q)d=Q-P$ ஆம்

இவ்வாறே, $QR(q-r)d=R-Q$ என்றும்

$RP(r-p)d=P-R$ என்றும் பெறலாம்.

இவற்றைக் கூட்ட,

$$d[PQ(p-q)+QR(q-r)+RP(r-p)]$$
$$=Q-P+R-Q+P-R=0 \text{ ஆம்.}$$

$\therefore$ $PQ(p-q)+QR(q-r)+RP(r-p)=0$ ஆதல் நிரூபிக்கப் பட்டதாகும்.

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினாக்கள்

1. $\frac{1}{6}$க்கும், $\frac{1}{29}$க்கும் இடையே பதினொரு ஹார்மோனிக் இடை யுறுப்புக்களை யிடுக.

விடை :

r ஆவது ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பு h_r என்றால் அப்பொழுது $\frac{1}{6}$, h_1, h_2,......h_{11}, $\frac{1}{29}$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியிலிருக்கும்.

$\therefore$ $6, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \ldots\ldots \frac{1}{h_{11}}$, 29 என்னும் 13 உறுப்புக்களும் கூட்டு விருத்தியில் கூடி நிற்கும். இவ்விருத்தியின் பொதுவித்தியாசம் d ஆகுமெனின், 13வது உறுப்பு $a+(n-1)d$ என்றபடி கொள்ளுங்கால் $29=6+12d$ ஆம். இதிலிருந்து $d=\frac{23}{12}$ ஆம்.

$\therefore$ கூட்டு விருத்தியின் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு $\left(\frac{1}{h_r}\right)$

$$=6+(r+1-1)d$$
$$=6+rd=6+\frac{23}{12}r$$
$$=\frac{23r+72}{12}$$

$$\therefore \qquad h_r=\frac{12}{23r+52}$$

r க்கு 1, 2, 3......11 ஆகிய எண்களைப் பிரதியீடு செய்ய

$\frac{12}{95}, \frac{12}{118}, \frac{12}{141}, \frac{12}{164}, \frac{12}{187}, \frac{12}{210}, \frac{12}{233}, \frac{12}{256}, \frac{12}{279}, \frac{12}{302}, \frac{12}{325}$ அஃதாவது இவை சுருக்கமெய்தியவிடத்து

$\frac{12}{95}, \frac{6}{59}, \frac{4}{47}, \frac{3}{41}, \frac{12}{187}, \frac{2}{35}, \frac{12}{233}, \frac{3}{64}, \frac{4}{93}, \frac{6}{151}, \frac{12}{325}$

என்பன பெறவேண்டிய ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்களாக வரும்.

2. $(b+c), (c+a), (a+b)$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியிலிருந்தால் a^2, b^2, c^2 என்பன கூட்டு விருத்தியிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

$(b+c), (c+a), (a+b)$ என்பன ஹா. வி யில் இருத்தலால்

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ஆவன கூ.வி யிலிருக்கும்.

ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $(a+b)\ (b+c)\ (c+a)$ஆல் பெருக்க $(a+b)\ (c+a), (b+c)\ (a+b), (b+c)\ (c+a)$ கூட்டு விருத்தியாகும்.
அஃதாவது, $a^2+\Sigma bc,\ b^2+\Sigma bc,\ c^2+\Sigma bc$ கூ.வி யிலிருக்கும்.
அஃதாவது, a^2, b^2, c^2 கூ. வி.யாகும்.

பிறிதொரு முறை :

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$$

அஃதாவது, $$\frac{(b+c)-(c+a)}{(c+a)\ (b+c)}=\frac{(c+a)-(a+b)}{(a+b)\ (c+a)}$$

,, $$\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$$

,, $$(b+a)\ (b-a)=(c+b)\ (c-b)$$

,, $$b^2-a^2=c^2-b^2$$

$\therefore$ a^2, b^2, c^2 என்பன கூட்டு விருத்தியில் இருப்பனவாம்.

பயிற்சி 8·2

1. $\frac{1}{3}$ க்கும் $\frac{1}{21}$ க்கும் இடையே 5 ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்களை யிடுக.

[விடை : $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18}$]

2. $\frac{2}{7}$ க்கும் $\frac{2}{17}$ க்கும் இடையில் 4 ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்களை யிடுக.

[விடை : $\frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{2}{13}, \frac{2}{15}$]

3. ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் மூன்றும் உறுப்பு $\frac{1}{11}$ ஆகும்; ஏழாவது உறுப்பு $\frac{1}{23}$ ஆகும் என்றால், அவ்விருத்தியை அமைத்துக் காட்டுக.

[விடை : $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$]

4. இரண்டு எண்களின் கூட்டு இடையுறுப்பு 6 ஆகும்; அவற்றின் ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பு $4\frac{1}{2}$ ஆகும் எனின், அவ்வெண்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 3, 9]

5. ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் முதலாவது உறுப்பும் இருபதாவது உறுப்பும் முறையே a, b க்களாம். அதன் 15 வது, 25 வது உறுப்புக்களைக் கண்டறிக.

$$\left[\text{விடை : } \frac{19ab}{15a+4b}; \frac{19ab}{24a-5b}\right]$$

6. n உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியின் முதலுறுப்பு a யும், இறுதியுறுப்பு c யும் ஆனல், அதன் m ஆவது உறுப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $(n-1)ac/(n-m)c+ma$]

7. ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் p ஆவது உறுப்பு q ம், q ஆவது உறுப்பு p ம் ஆகுமெனின், (i) $(p+q)$ ஆவது உறுப்பு (ii) pq ஆவது உறுப்பு, (iii) r ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : (i) $pq/p+q$ (ii) $1/pq$ (iii) pq/r]

8. முதலுறுப்பு a ஆகவும், இரண்டாம் உறுப்பு b ஆகவுங் கொண்டதொரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் n ஆவது உறுப்பைக்காண்க.

[விடை : $ab/\{b+(n-1)(a-b)\}$]

9. ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் $p+q$ ஆவது உறுப்பு 'a' யும், $(p-q)$ ஆவது உறுப்பு 'b' யும் ஆகுமாஞல், q ஆவது உறுப்பைக் கண்டறிக.

$$\left[\frac{2abq}{b(2q-p)+ap}\right]$$

10. a, b, c என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியில் நின்ருல்,

(a) (i) bc, ca, ab என்பன கூட்டுவிருத்தியில் நிற்கும்

(ii) $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ என்பன கூட்டுவிருத்தியில் நிற்கும்

(iii) $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியில் நிற்கும்.

(iv) $\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c}$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியில் நிற்கும்.

(b) $(b+c), (c+a), (a+b)$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியிலிருந்தால், a^2, b^2, c^2 என்பன கூட்டுவிருத்தியில் நிற்குமெனக் காட்டுக.

11. $\log_a x, \log_b y, \log_c z$ கூட்டுவிருத்தியில் இருந்தால், $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ ஹார்மோனிக் விருத்தியில் நிற்கும்.

12. a, b க்களுக்கு இடையில் கூட்டு இடையுறுப்பு A ஆகவும், ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பு H ஆகவும் கொள்ளப்பட்டால், $\frac{a-A}{a-H}+\frac{b-A}{b-H}=\frac{A}{H}$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

13. a, b, c என்பன ஓரே இராசியனவாகி ஹார்மோனிக் விருத்தியில் நின்ருல், $ax^2+2bx+c=0$ ன் மூலங்கள் கற்பனைகளாகுமென்று நிரூபி.

14. $p(q-r)x^2+q(r-p)x+r(p-q)=0$ ன் மூலங்கள் சமமானுல், p, q, r கள் ஹார்மோனிக் விருத்தியில் விளங்குவனவாமெனக் காட்டுக.

15. ஒரு கூட்டுவிருத்தியும், ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியும் a யையும், b யையும் தமது முதலிரண்டு உறுப்புக்களாகக் கொண்டுள்ளன. அவற்றின் n ஆவது உறுப்புக்கள் x ம் y ம் ஆனுல், $\frac{x-a}{y-a}=\frac{b}{y}$ என்று காட்டுக.

16. ஹார்மோனிக் விருத்தியில் இருக்கும் மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை 22 ம், அவற்றின் விலோமங்களின் (Reciprocals) கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{2}$ ம் ஆமெனின் அவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : 12, 6, 4)

17. ஹார்மோனிக் விருத்தியிலுள்ள மூன்றெண்களின் கூட்டுத் தொகை 11 ஆகும் ; அவற்றது வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 49 ஆகும் எனின், அவ்வெண்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 6, 3, 2]

18. $a_1, a_2, \ldots a_n$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியிருந்தால், $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n$ என்றுகாட்டுக. இதைக்கொண்டு a, b, c, d என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியிலிருந்தால் $ab+bc+cd = 3ad$ எனக் காட்டுக.

19 a க்கும் b க்கும் இடையில் n ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்களை இடுக. முதலிடை யுறுப்புக்கும் இறுதியிடை யுறுப்புக்கு முள்ள வித்தியாசம் $ab(a-b)$ ஆனால், $x^2(1-ab) - x(a^2+b^2) - (1+ab) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலமாக n அமையும் எனக் காட்டுக.

20. x, y களுக்கு இடையில் a_1, a_2, a_3 என்பன கூட்டு இடை யுறுப்புக்களும், h_1, h_2, h_3 என்பன ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக் களும் ஆனால், $a_1 - h_3 = a_2h_2 = a_3h_1 = xy$ என்று காட்டுக.

21. a க்கும் b க்கும் இடையில் $A_1, A_2, \ldots A_n$ என்பன n கூட்டு இடையுறுப்புக்களாகவும், $H_1, H_2, \ldots H_n$ என்பன n ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புக்களாகவும் கொள்ளப்பட்டால்,

$$A_1H_n = A_2H_{n-1} \ldots = A_rH_{n-r+1} = A_nH_1 = ab \text{ என்று காட்டுக.}$$

22. ஒரு கூட்டுவிருத்தியும், ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியும் தனித் தனியே அதே a ஐ முதலுறுப்பாகவும், அதே b யை இறுதியுறுப் பாகவும், மொத்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை அதே n ஆகவும் கொண்டுள்ளன. கூட்டுவிருத்தியின் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு ஹார்மோனிக் விருத்தியின் $(n-r)$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் al ஆகுமென்று நிரூபிக்க. (அப் பெருக்கற்பலன் r ஐப் பெருது தனித்து விளங்குமாறறிக)

III. பெருக்கு விருத்தி (Geometric progression)

[பெருக்குத் தொடர்]

1. வரையறை :

ஒரு எண் வரிசையில் யாதேனுமோர் எண்ணுக்கும் அதன் முன்னிற்கும் எண்ணுக்குமுள்ள விகிதம் அவ்வரிசையில் எவ்விடத்தும் மாறாது காணக்கிடக்குமாயின், அவ்வரிசை பெருக்குவிருத்தியெனப் படும்.

1, 4, 64......எனப் பெருக்குவிருத்தியில் அமைந்துள்ள எண் வரிசையில் 4 ஆனது பொது விகிதமாக எவ்விடத்தும் அமைந்திருக்கக் காண்கின்றோம்.

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$......இப் பெருக்குவிருத்தித் ,, தொடரில் பொது விகிதம் $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

27, -9, 3, -1 இப் பெருக்குவிருத்தியில் பொதுவிகிதம் $-\frac{1}{3}$ ஆம்.

(i) ஒரு பெருக்குவிருத்தியிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களும் ஒரே பரிமாணத்தால் பெருக்கல்படினும் வகுபடினும், வரும் பரிமாணங் களும் முன்னைய பொது விகிதமே கொண்டு பெருக்கல் விருத்தித் தன்மை மாறுபடாமலிருக்கும்.

(ii) ஒரு பெருக்குவிருத்தியின் உறுப்புக்கள் எல்லாம் ஒரே அடுக் குக்கு உயர்த்தப்பட்டால், வரும் பரிமாணங்களும் புதியதொரு பொது விகிதத்தைக் கொண்ட பெருக்குவிருத்தி யாகவே அமைவுற்று நிற்கும்.

(iii) ஒத்த இடையீட்டில் கண்டெடுத்த உறுப்புக்களும் பெருக்கு விருத்தியில் அமையும்.

(iv) a, b, c, d ... பெருக்குவிருத்தியில் இருந்தால், அவைகள் தொடர் விகித சமத்தில் அமையும், $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ஆதலின்.

2. ஒரு பெருக்குவிருத்தியின் நியம ரூபம் :

a முதலுறுப்பும்; r பொது விகிதமுமானால், பெருக்குவிருத்தியின் நியம ரூபம் $a, ar, ar^2 \ldots\ldots ar^{n-1}$ என அமையும்.

3. பெருக்குவிருத்தியின் இடையுறுப்பு :

மூன்று எண்கள் பெருக்குவிருத்தியில் அமைந்தால், நடுவிலிருப்பது ஏனைய விரண்டின் பெருக்கு இடையுறுப்பு எனப்படும்.

a, G, b என்பன பெருக்குவிருத்தியி லிருந்தால், aக்கும் bக்கும் நடுவுறும் பெருக்கு இடையுறுப்பாக G கூறப்படும்.

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G} \qquad \therefore \quad G^2=ab\,; \qquad \therefore \quad G=\sqrt{ab}.$$

4. பெருக்கு இடையுறுப்புக்கள் :

$a, g_1, g_2, \ldots g_n, b$ என்பன பெருக்குவிருத்தியி லிருந்தால், அப்பொழுது $g_1, g_2, \ldots\ldots g_n$ என்பன a க்கும் b க்கும் இடையே காணப்படும் பெருக்கு இடையுறுப்புக்கள் (Geometric Means) எனப்படும்.

5. a, b க்களுக்கு இடையே n இடையுறுப்புக்களை யிடுதல்

இடையுறுப்புக்கள் $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots g_n$ என்பனவாகுக.

$\therefore \; a, g_1, g_2 \ldots\ldots g_n, b$ க்கள் ஒரு பெருக்குவிருத்தியை அமைவுறுத்த வேண்டும். அப்பொழுது முனையுறுப்புக்களையும் சேர்த்து $(n+2)$ உறுப்புக்கள் உளவாகும். b ஆனது $(n+2)$ ஆவது உறுப்பாகும். இப்பெருக்கல் விருத்தியின் பொது விகிதம் r ஆகுக.

அப்பொழுது $(n+2)$வது உறுப்பு$=ar^{n+2-1}=ar^{n+1}$

$$\therefore \quad ar^{n+1}=b \qquad \therefore \quad r^{n+1}=\frac{b}{a} \qquad \therefore \quad r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

ஆகவே, பெறவேண்டிய இடையுறுப்புக்கள்

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}};\; a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \;\ldots\; a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} \text{ ஆம்.}$$

6. பெருக்குவிருத்தியின் கூட்டுப்பலன் :

a, முதலுறுப்பும் ; r, பொது விகிதமும் ; n, பெருக்குவிருத்தியிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும்; S, உறுப்புக்களின் கூட்டுப் பலனும் ஆகுக.

அப்பொழுது, $S=a+ar+ar^2+\ldots\ldots ar^{m-2}+ar^{n-1}$ (1)

(1) ன் இருபக்கங்களேயும் r ஆல் பெருக்கி, வரும் உறுப்புக்களே அடுக்கொப்பு நோக்கி யவற்றின் கீழே எழுதுக.

$S_r=ar+ar^2\ldots\ldots ar^{n-1}+ar^n$ ஆம் (2)

$\therefore$ (1)—(2) ஆல் கிடைப்பது $S(1-r)=a-ar^n\ a(1-r^n)$ ஆம்

$\therefore$ $r<1$ ஆனுல், $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ என்றும்

$r>1$ ஆனுல், $S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1)}$ என்றும்எ ழுதலாம்.

7. **முடிவிலாப் பெருக்குவிருத்தியின் கூட்டுப் பலன் :**

r ன் மதிப்பு 1க்குக் குறைந்திருந்தால் (அஃதாவது r ன் மதிப்பு -1க்கும் $+1$க்கும் இடைப்பட்டுக் கிடந்தால், அஃதாவது r ஆனது தகுபின்னமாஞல்) அப்பொழுது ஒரு முடிவிலாப் பெருக்குவிருத்தியானது முடிவுடையதோர் கூட்டுப் பலனே யடையச் செல்லுவதாகும்.

இப்பொழுது, ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுப் பலன் $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-x}$ என்று கொடுக்கப் பெற்றனம்.

r ஆனது எண்மதிப்பில் 1க்குக் குறைவுறும் பொழுதும், $n\to\infty$ நேரும்பொழுதும் $r^n\to 0$ ஆகும். அந்நிலேயில் $a\dfrac{r^n}{1-r}$ ம் $\to 0$ ஆகும்.

ஆகவே, எல்லேமதிப்பில் கூட்டுத்தொகையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\ S_n=\frac{a}{1-r}$$

8. **விளக்க உதாரணங்கள் :**

1. $7+77+777+\ldots\ldots$என்னும் தொடரில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டறிக.

n உறுப்புக்கள் வரையில் கூட்டுத்தொகையை S_n என்று குறிப்பிட்டால்,

$$S_n=7(1+11+111+\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=\tfrac{7}{9}(9+99+999+\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=\tfrac{7}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots\ldots]$$

$$=\tfrac{7}{9}[10+10^2+10^3+\ldots\ldots10^n-n]$$

$$\frac{7}{9}\left[10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n\right]=\frac{7}{9}\left[10\,\frac{(10^n-1)}{9}-n\right]$$

$$\frac{70(10^n-1)}{81}-\frac{7}{9}n.$$

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\ldots\ldots$ என்னும் பெருக்குவிருத்தியில் குறைந்த பட்சம் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையானது அதன் அனந்த உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு $\frac{1}{5000}$ க்கும் குறைவுற்றிருப்பதாகும்.

கொடுத்த தொடரில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$$=\tfrac{1}{2}\,\frac{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \text{ ஆம்.}$$

அனந்த வுறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$ ஆம்.

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை அனந்தவுறுப்புத்தொடர்ச்சியின் கூட்டுத்தொகைக்கு $\frac{1}{5000}$ க்கும் குறைவு படுதலின்,

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{5000}\text{. அஃதாவது } \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^n}<\frac{1}{5000}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}<\frac{1}{5000}\qquad\therefore\quad 4\cdot 3^{n-1}>5000$$

$$\therefore\quad 3^{n-1}>\frac{5000}{4}.\qquad\text{அல்லது } 1250 \text{ ஆம்.}$$

$$\therefore \quad (n-1)\log 3 > \log 1250$$

$$\therefore \quad (n-1) > \frac{\log 1250}{\log 3}$$ அஃதாவது 6·5.

$$\therefore \quad n > 7{\cdot}5$$

ஆகவே, உறுப்புக்களின் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கை 8 ஆகும்.

3. n ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு யாதானால், $1+3+3^2+\ldots\ldots$ என்னும் பெருக்கு விருத்தியில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 2000 க்கு அதிகப்படலாகும்.

[பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா]

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஆகுக

$$S_n = \frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

கணக்கின்படி, $S_n > 2000$ ஆகும்பொழுது, n ன் குறைந்தபட்ச மதிப்பு அறியப்படவேண்டிய தாகும்.

அஃதாவது $$\frac{3^n-1}{2} > 2000$$

$$\therefore \quad 3^n-1 > 4000$$

$$\therefore \quad 3^n > 4001$$

இந்நிலையில், 37=2187 ம், $3^8=6561$ ம் ஆகும் என அறியப்படும்.

$\therefore$ n ன் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 8 ஆதல் பெறப்படும்.

பயிற்சி 8·3

1. (i) 160 க்கும் $2\frac{1}{2}$ க்கும் இடையில் 5 பெருக்கு இடையுறுப்புக்களை இடுக,

(ii) 108 க்கும் $\frac{4}{81}$ க்கும் இடையில் 6 பெருக்கு இடையுறுப்புக்களை இடுக.

2. பின்வரும் தொடர் வரிசைகளைக் கூட்டுக :

(i) $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, 3 ...... 12 உறுப்புக்களுக்கு

(ii) $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}}$......20 உறுப்புக்களுக்கும், அனந்த வுறுப்பு நிலைக்கும்

(iii) 2, -1, $\frac{1}{2}$ ...... n உறுப்புக்களுக்கு

(iv) $3+(1+x)+(1+x+x^2)+(1+x+x^2+x^3)$ ...... n அடைப்புக்களுக்கு

(v) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\ldots\ldots$ அனந்த நிலைக்கு

(vi) $9-6+4$ ...... அனந்த நிலைக்கு

3. மதிப்பறிக :

(i) $3{\cdot}4\dot{1}\dot{7}$ (ii) ${\cdot}4\dot{3}\dot{5}$

4. ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் முதலிரண்டு உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 2 ம், முதனன்கு உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 20 ம், ஆகுமானல் அவ்விருத்தியைக் கண்டறிக.

5. ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையும், மூன்ருவது முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையும் 4 : 9 என்னும் விகிதத்தில் இருக்கின்றன. அதன் ஆருவது உறுப்பு $15\frac{3}{16}$ ஆனல், 10 வது உறுப்பை அறிக.

[விடை : $\frac{3^9}{2^8}$]

6. பெருக்குவிருத்தியி லுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 21 ம், அவற்றின் பெருக்குத்தொகை 64 ம் ஆனல் அவ்வெண்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 1, 4, 16]

7. ஒரு பெருக்கு விருத்தியில் நான்காவது உறுப்பு 4; ஏழாவது உறுப்பு $\frac{1}{21}$ ஆனால், அவ்விருத்தியையும் அதன் n ஆவது உறுப்பையும் அறிக.

8. ஒரு பெருக்கு விருத்தியின் கூட்டுத்தொகை 889; இறுதி யுறுப்பு $=448$; பொது விகிதம் 2; எனின், அதன் முதலுறுப்பு யாது?

[விடை : 7]

9. ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் முதலுறுப்பு 2, கூட்டுத்தொகை 728, இறுதியுறுப்பு 486 எனின், பொதுவிகிதம் (common ratio) யாது?

[விடை ; 4]

10. ஒரு பெருக்கு விருத்தியில் அந்த உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2}$ ஆகும். அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{1}{8}$; அத்தொடர் வரிசையை யறிக.

[விடை : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ ...]

11. ஒரு பெருக்கு விருத்தியில் அநந்த வுறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை 2, அவற்றின் கனங்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{8}{7}$: அவ்விருத்தியை அமைக்க.

[விடை : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. ...]

12. இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை அவற்றின் பெருக்கிடை யுறுப்பை (geometric mean) விட 9 அதிகமாகும்; அக் கூட்டுத் தொகையின் வர்க்கம் அவற்றின் பெருக்கல் பலனைவிட 189 அதிக மாகும் என்றால் அவ்வெண்களைக் காண்க.

[விடை : 12, 3]

13. ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் ஒவ்வொரு இரண்டு உறுப்புக் களுக்கும் இடையே ஒரு பெருக்கிடையுறுப்பு கண்டறியப்பட்டது. இவ்விடை யுறுப்புக்களெல்லாங் கூடி ஒரு பெருக்கு விருத்தியாய் அமையுமெனக் காட்டுக.

14. ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் n ஆவது, $2n$ ஆவது, $3n$ ஆவது, $4n$ ஆவது உறுப்புக்கள் ஒரு பெருக்குவிருத்தியை அமைக்குமெனக் காட்டுக.

M—11

15. மூன்று உறுப்புக்கள் ஒரு பெருக்குவிருத்தியி லுள்ளன. அவற்றின் ஒவ்வொன்றனுக்கும் இடையுறுப்பு (middle form) இணைக்கப்பட்டது. இப்பொழுது வந்த உறுப்புக்கள் ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியில் நிற்குமெனக் காட்டுக.

16. (i) a க்கும் b க்கும் இடையிலிடும் n பெருக்கு இடையுறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணுதற்கு ஒரு கோவையை அமைக்க.

(ii) இடையுறுப்புக்களின் பெருக்கற்பலன் $=(ab)^{n/2}$ என்று நிரூபிக்க.

17. a, b, c க்கள் ஒரு பெருக்குவிருத்தியிலும், $a^x=b^y=c^z$. என்னும் வரையறையிலும் நிற்குமாயின், x, y, z க்கள் ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்திக்குரியவாகுமென்று நிரூபிக்க.

18. a, b, c, d க்கள் ஒரு பெருக்குவிருத்தியிலிருந்தால்,

(i) $(a-b+c)(b+c+d)=ab+bc+cd$ என்றும்

(ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$ என்றும்

ஆகுமென்று நிரூபி.

19. $1+3+3^2+3^3...$ என்னும் தொடர் வரிசையை n உறுப்புக்கள் வரை கூட்ட வருந்தொகை 2000 க்கு மேற்படுங்கால் n ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு யாதாக வேண்டுமெனக் கண்டறிக.

[விடை : $n=8$]

20. $S_n=1+4+4^2+...4^n$ ஆனால், $S_n>1500$ ஆதற்கு n ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $n=6$]

21. n உறுப்புக்கள் வரைக் கூட்டுக :

(i) $4+44+444+......$

(ii) $\cdot 3+\cdot 33+\cdot 333+......,$

22. ஒரு குறிப்பிட்ட பெருக்குவிருத்தியின் கூட்டுத்தொகை $3-\frac{3^{n+1}}{4^{2n}}$ ஆனால், அதன் முதலுறுப்பையும், பொதுவிகிதத்தையும் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{39}{16}$, $\frac{3}{16}$]

23. ஒரு பெருக்குவிருத்தியில் உள்ள n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை S ம், பெருக்கற்பலன் P ம், விலோமங்களின் கூட்டுத்தொகை R ம் ஆனால், $P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n$ என்று நிரூபி.

24. $x=1+a+a^2\ldots\infty$ வரைக்கும் என்றும், $y=1+b+b^2\ldots\infty$ வரைக்கும் எனவும், a,b க்களுள் ஒவ்வொன்றும் 1க்குக் குறைந்த தென்றுங் கொண்டால், $1+ab+a^2b^2+\ldots\ldots\infty$ வரைக்கும் $=\frac{xy}{x+y-1}$ என்று நிரூபி.

25. ஒரு பெருக்கு விருத்தியில் M, N, P என்பன முறையே m ஆவது, n ஆவது, p ஆவது உறுப்புக்களானால் பின்வருவனவற்றை நிரூபி.

(i) $M^{n-p}\,.\,N^{p-m}\,.\,P^{m-n}=1$

(ii) $(n-p)\log M+(p-m)\log N+(m-n)\log P=0.$

26. ஒரு கூட்டுவிருத்தியிலும் ஒரு பெருக்குவிருத்தியிலும் a, b, c என்பன முறையே p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்களானால் $a^{b-c}\,.\,b^{c-a}\,.\,c^{a-b}=1$ என்று நிரூபி.

27. a, b, c க்கள் கூட்டுவிருத்தியிலும், x, y, z க்கள் பெருக்கு விருத்தியிலும் இருந்தால் $x^{b-c}\,.\,y^{c-a}\,.\,z^{a-b}=1$ என்று நிரூபி.

28. ஒரு பெருக்குவிருத்தியிலும் ஒரு ஹார்மோனிக் விருத்தியிலும் a, b, c என்பன முறையே m ஆவது, n ஆவது, p ஆவது உறுப்புக் களாக அமையுமானால், $a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0$ என்று காட்டுக.

29. n பெருக்குவிருத்திகளில் எல்லா முதலுறுப்புக்களும் ஒன்றே யாகும் : அவற்றுள் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை முறையே S_1, $S_2\ldots S_n$ ஆகும். அவற்றின் பொது விகிதங்கள் முறையே $1, 2, \ldots n$

என்றால் $S_1 + S_2 + 2S_3 + 3S_4 + \ldots (n-1) S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots n^n$ என்று காட்டுக.

30. இயற்கை எண்கள் பின்வரும் தொகுப்புக்களாக அடைவு செய்யப்பட்டுள்ளன : 1: (2, 3); (4, 5, 6, 7): (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)... r ஆவது தொகுப்பில் 2^{r-1} எண்கள் அடங்கி நிற்கும். எனின், n ஆவது தொகுப்பிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

31. ஒரு பந்தானது மேலேயிருந்து விழுந்து தரையைத் தாக்குந் தொறும் முன்னிருந்து விழுந்த வுயரத்தில் $\frac{4}{5}$ பங்கு உயரத்திற்கே மீண்டும்எழுந்து செல்ல வல்லதாகும். அதனை 120 மீட்டர் உயரத்தி லிருந்து கீழ்நோக்கி நழுவி விழவிட்டால், அஃது எழுச்சிநிலைமுற்றும் தணந்து ஓய்வுறும் வரையில் சென்ற மொத்த தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

IV. மூன்று விருத்திகள் :

தேற்றம் :

எந்த இரண்டு தனராசிப் பரிமாணங்களுக்கு இடையே உள்ள கூட்டு இடையுறுப்பும், பெருக்கு இடையுறுப்பும், ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பும் இறங்கு வரிசையில் ஒரு பெருக்கு விருத்தியில் அமைவனவாகும்.

A, G, H என்பன முறையே a, b என்னும் இரண்டு தனராசி எண் களுக்கு இடையே இடப்பட்ட கூட்டு இடையுறுப்பும், பெருக்கு இடை யுறுப்பும், ஹார்மோனிக் இடையுறுப்புமா மெனக்கொள்க.

அப்பொழுது, $A = \frac{a+b}{2}$; $G = \sqrt{ab}$; $H = \frac{2ab}{a+b}$ ஆம்.

$$\therefore \quad AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = (\sqrt{ab})^2 = G^2$$

$\therefore$ A, G, H என்பன பெருக்கு விருத்தியில் அமைவுறுதல் அறியப் படும். இப்பெருக்கு விருத்தியின் பொது விகிதம் $\frac{G}{A}$ அல்லது $\frac{H}{G}$ ஆகும். இப்பொது விகுதி < 1 ஆகுமென்று என்று நிரூபிப்போம்,

இப்பொழுது,

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

aயும் bயும் அசமமாதலின், இது எப்பொழுதும் தனராசிப் பரிமாணமே யாகும்.

$$\therefore \qquad G<A, \text{ அல்லது } \frac{G}{A}<1.$$

பொதுவிகிதம் 1க்குக் குறைந்திருத்தலால், A, G, H ஆவன பெருக்கு விருத்தியில் $A>G>H$ என இறங்குவரிசையில் நிற்பனவாம்.

ஆகவே, $G^2=A.H.$ ஆம்.

பயிற்சி 8.4

1. a, b, c என்னும் மூன்று பரிமாணங்கள் $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}, \frac{a}{b}$ அல்லது $\frac{a}{c}$ என்றமைதற்கு ஏற்ப முறையே கூ. வி; பெ. வி; ஹா. வி யிலிருக்குமென்று நிரூபிக்க.

2. இரண்டு பரிமாணங்களுக்கு இடையே ஒரே ஒற்றைப்படை யெண்ணிக்கையுள்ள கூ. வி; பெ. வி; ஹா. வி; இடையுறுப்புக்களை இட்டால், அவ்விடையுறுப்புக்களெல்லாம் ஒரு பெ.வி. யில் நிற்பன வாமென நிரூபிக்க.

3. a, b, c, d என்னும் தனராசியெண்கள் ஒரு கூ. வி. ஒரு பெ. வி. அல்லது ஒரு ஹா.வி யில் நிற்பதற்குத் தகுந்தாற்போல $bc-ad >=< 0$ ஆமென்று காட்டுக.

4. x, a_1, a_2, y என்பன கூ.வியிலும், x, g_1, g_2, y என்பன பெ.வி. யிலும்; x, h_1, h_2, y என்பன ஹா.வி யிலும் இருப்பனவானால்,

(i) $\frac{g_1g_2}{h_1h_2}=\frac{a_1+a_2}{h_1+h_2}$ (ii) $xy=g_1g_2=a_1h_2=a_2h_1$ எனக் காட்டுக.

5. இரண்டு எண்களின் கூட்டு இடையுறுப்பு அவற்றின் பெருக்கு இடையுறுப்பைவிட 2 அதிகமாகும்; அவற்றின் ஹார்மோனிக் இடை

யுறுப்பானது அவ்வெண்களுள் பெரியதின் $\frac{1}{6}$ பங்காகும் என்றால், அவ்வெண்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 1, 9]

6. x, zக்களின் கூட்டு இடையுறுப்பு y ஆகவும், பெருக்கு இடையுறுப்பு ny ஆகவும்விளங்கினல், அவற்றின் ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பு n^2y ஆமென்று நிரூபிக்க.

7. bக்கும் cக்கும் இடையில் a ஆனது கூட்டு இடையுறுப்பென்றும், aக்கும், cக்கும் இடையில் b ஆனது பெருக்கு இடையுறுப்பென்றும் கொள்ளக்கிடந்தால், aக்கும் bக்கும் இடையில் c ஆனது ஹார்மோனிக் இடையுறுப்பாய் அமையும் என்று நிரூபிக்க,

8. a, b, c க்கள் கூ. வி. (H. P.) யிலும், b, c, d கள் பெ. வி. (G. P.) யிலும் : c, d, e க்கள் கூ. வி. யிலும் இருந்தால், $e = \frac{ab^2}{(2a-b)^2}$ என்று நிரூபிக்க.

9. a, b, c க்கள் கூ. வி (A. P.) யிலும், b, c, d க்கள் பெ. வி (G.P.) யிலும், c, d, e க்கள் ஆ. வி (A.P.) யிலுமிருந்தால், a, c, e க்கள் பெ. வி. யில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

10. a, b, c க்கள் கூ. வி (A.P.) யிலும்), b, c, a க்கள் பெ. வி. (G.P.) யிலும், இருந்தால் c, a, b க்கள் ஆ. வி (H. P.) யிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

11. a, b என்னும் இரண்டு எண்களுக்கு இடையே x_1, x_2 என்பன கூட்டு இடையுறுப்புக் (A.M.) களாகவும், y_1, y_2 என்பன ஆ. இடையுறுப்புக் (H.M.) களாகவும், Z_1, Z_2 என்பன பெ. வி. இடையுறுப்புக் (G. M.) களாகவும் இருந்தால், $x_1 y_2 = x_2 y_1 = Z_1 Z_2$ என்று காட்டுக.

12. மூன்று எண்கள் ஆ. வி. (H.P.) யிலுள்ளன. நடுவெண்ணோடு 1 ஐக் கூட்டினால் அவ்விருத்தி கூட்டுவிருத்தியாகும், மூன்றாவது எண்ணிலிருந்து $1\frac{1}{2}$ ஐக் கழித்தால் பெருக்கு விருத்தியாகவும் அமையுமாகில் அவ்வெண்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 2, 3, 6]

13. x, 1, Z என்பன கூ. வி (A.P.) யிலும், x, 2, Z என்பன பெ.வி. (G.P.) யிலும், இருந்தால் x, 4, Z என்பன ஆ. வி (H.P.) யிலிருக்குமென்று காட்டுக.

14. ஒரு கூட்டுவிருத்தி (A.P.)யின் $(m+1)$ ஆவது, $(n+1)$ஆவது, $(r+1)$ ஆவது உறுப்புக்கள் பெ.வி (G.P.) யில் அமைகின்றன; m, n, r கள் ஆ. வி (H. P.) யில் நிற்கின்றன; எனின், பொது வித்தியாசமானது கூ.வி (A.P.) யின் முதலுறுப்போடு கொள்ளும்விகிதம் $-\frac{2}{n}$ என்று காட்டுக.

15. α. β, r என்பன முறையே ca, ab; ab, bc; bc, ca என்பவற்றின் பெருக்கு இடையுறுப்புக் (G.M.) களாமெனின், a, b, c என்பன கூட்டுவிருத்தியில் நிற்பனவாமெனவும், α^2, β^2, γ^2 களுங்கூட கூட்டு விருத்தியில் உள்ளனவாமெனவும், $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta$ என்பன ஹார்மோனிக் விருத்தியில் விளங்குவனவா மெனவும் நிரூபிக்க.

16. a, b, c க்கள் கூட்டுவிருத்தியிலும், α, β, γ என்பன ஹா. வி. (H.P) யிலும், $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ என்பன பெ. வி. (G.P.) யிலும் நிற்பன வாஞல்

(i) $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$

(ii) $\frac{a}{c}=\frac{\alpha}{\gamma}$ அல்லது $\frac{\gamma}{\alpha}$ என்றும் நிரூபிக்க.

17. a, b, c கூட்டுவிருத்தியிலும், a, mb, c பெருக்கு விருத்தியிலும் அமைந்தால், a, m^2b, c ஹார்மோனிக் விருத்தியில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

18. P, Q, R என்பன முறையே (i) ஒரு கூட்டுவிருத்தியின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்களும் (ii) ஒரு பெருக்கு விருத்தியின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்களும் (iii) ஒரு ஹார்மானிக் விருத்தியின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்களும் ஆகும் எனில்

(i) $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0$

(ii) $P^{q-r} . Q^{r-p} . R^{p-q}=1$

(iii) $QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$ என நிரூபி.

V. கூட்டுப் பெருக்கு வரிசைகள் :

1. வரையறை :

பல உறுப்புக்களின் தொடர்வரிசையில் ஒவ்வோருறுப்பின் முதல் காரணிகளெல்லாம் கூட்டு விருத்தியில் இருக்கவும், இரண்டாவது காரணிகளெல்லாம் பெருக்கு விருத்தியில் இருக்கவும் காணப்பட்டால், அங்ஙனம் இவ்விரு காரணிகளால் அமைந்த பலவுறுப்புக்களின் தொடர் நிலையானது கூட்டுப்—பெருக்குத் தொடர் வரிசை (Arithmetico-Geometric Series) எனப்படும்.

2. நியம ரூபம் :

இங்ஙனமாகிய தொடர் வரிசையின் நியம ரூபம்

$$a, (a+d)r, (a+2d)r^2, \ldots\ldots \{a+(n-1)d\}\ r^{n-1}$$ ஆகும்.

3. ஒரு கூட்டுப்—பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் கூட்டுப் பலனைக் காணல் :

$$S_n=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\ldots\ldots[a+(n-1)d]^{n-1}$$
$$+a+(n+d)r^n\}$$ ஆகுக.

அப்பொழுது

$$rS_n=ar+(a+d)r^2+\ldots\ldots(a+(n-2)d]r^{n-1}+\ \{a+(n-1)d\}\ r^n$$
கழிக்க,

$$S_n(1-r)=a+dr+dr^2+\ldots\ldots\ \{a+(n-1)d\}\ r^n$$

$$=a+\frac{d_r(1-r^{n-1})}{1-r}-\ \{a+(n-1)d\}\ r^n$$

$$S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{1-r^2}-\frac{dr^n}{1-r^2}-\frac{\{a+(n-1)d\}\ r^n}{1-r}$$

அநந்த நிலைக்குக் கூட்டுத்தொகையாமாறு :

$r < 1$ ஆனால், அஃதாவது $-1 < r < 1$ ஆனால், அப்பொழுது $n \to \infty$ ஆகும்பொழுது, $r^n \to 0$ ஆம்.

ஆகவே, $$\frac{dr^n}{1-r^2} \to 0$$

மேலும், $$\frac{[a+(n-1)d]r^n}{1-r} \to 0$$

$$\therefore \quad \underset{n\to\infty}{Lt}\, S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{1-r^2}$$

விளக்க வுதாரணங்கள் :

1. $1\cdot1+5\cdot2+9\cdot2^2+13\cdot2^3+\ldots n$ உறுப்புக்களுக்குக் கூட்டுத் தொகையை யறிக.

n ஆவது உறுப்பு $\{1+(n-1)4\}\ 2^{n-1}$ ஆகும்.

$$=(4n-3)2^{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

$$S_n = 1\cdot1+5\cdot2+9\cdot2^2+\ldots(4n-7)2^{n-2}+(4n-3)2^{n-1} \text{ ஆனால்}$$

$$2S_n = 1\cdot2+5\cdot2^2+\ldots-(4n-7)2^{n-1}+(4n-3)2n \text{ ஆம்.}$$

கழிக்க,

$$-S_n = 1\cdot1+4\cdot2+4\cdot2^2+\ldots4.2^{n-1}-(4n-3)2^n$$

$$=1+4\cdot2\ \frac{(2^{n-1}-1)}{2-1}-(4n-3)2^n$$

$$=1+8(2^{n-1}-1)-(4n-3)2^n$$

$$=1+2^{n+2}-8-(4n-3)2^n$$

$$=2^{n+2}-2^n(4n-3)-7$$

$$=2^n(7-4n)-7$$

$$\therefore \quad S_n = 2^n(4n-7)+7$$

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினு

1. பின்வருந்தொடரை n உறுப்புக்கள் வரை கூட்டுக :

$$1+3x+5x^2+7x^3+\ldots\ldots$$

கூட்டுத்தொகை S என்றால்,

$$S = 1+3x+5x^2+7x^3+\ldots\ldots n \text{ உறுப்புக்கள் வரை}$$

S_n வது உறுப்பு $(2n-1)x^{n-1}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad S = 1+3x+5x^2+7x^3+\ldots\ldots+(2n-1)x^{n-1}$$

$$S.x = x+3x^2+5x^3+\ldots\ldots+(2n-3)x^{n-1}+(2n-1)x^n$$

கழிக்க,

$$(1-x)S = 1+2x+2x^2+2x^3+\ldots\ldots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n$$

$$= 1+2x\frac{(1-x^{n-1})}{1-x}-(2n-1)x^n$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{1-x}+\frac{2x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}-\frac{(2n-1)x^n}{(1-x)}$$

பயிற்சி 8.5

1. $x<1$ உள்ளபொழுது $2+5x+8x^2+11x^3+\ldots\ldots$ என்னும் தொடர்வரிசையை n உறுப்புக்களுக்கும், அநந்த நிலை (Infinity) க்கும் உரிய கூட்டுப்பலனைக் கண்டறிக.

2. $1+3x+5x^2+7x^3\ldots\ldots$ என்னும் தொடர்வரிசையின் கூட்டுத் தொகையை n உறுப்பு வரையினும், மேலும் அநந்தநிலைக்கும் கண்டு பிடிக்க. பின்னதாகிய தன்மை எப்பொழுது சாத்தியமாகும் என்பதையும் குறிப்பிடுக.

3. நிரூபிக்க :

$$1+2\left(1+\frac{1}{n}\right)+3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\ldots\ldots n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=n^2$$

4. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}+\ldots\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் கூட்டுத்தொகையை n உறுப்புக்களுக்கும், அநந்தநிலைக்கும் கண்டறிக. பின்னதாகிய தன்மை எப்பொழுது சாத்தியமாமென்றுங் குறிப்பிடுக.

5. பின்வரும் கூட்டுப் -பெருக்கு விருத்திக்குரிய தொடர் வரிசையை அநந்தநிலை (Infinity) வரை கூட்டுப்பலனைக் கண்டறிக :

(i) $\frac{5}{7}+\frac{7}{21}+\frac{9}{63}+\frac{11}{189}+\ldots\ldots$

[விடை : $\frac{9}{7}$]

(ii) $1-\frac{3}{7}+\frac{5}{7^2}-\frac{7}{7^3}+\ldots\ldots$

[விடை : $\frac{2}{3}\frac{1}{2}$]

VI. அடுக்கேற்ற இயற்கை எண்களின் கூட்டுப் பலன்கள் :

1. முதல் n இயற்கை எண்களின் கூட்டுத்தொகை :

$S=1+2+3+\ldots\ldots n$ ஆகுக.

இத் தொடர் வரிசை ஒருகூட்டு விருத்தியாகும். இதன் முதலுறுப்பு 1ம்; இறுதியுறுப்பு nம்; உறுப்புக்களின் தொகை nம் ஆகும்,

$$\therefore \quad S=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

ஆகவே, $$\Sigma n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. முதல் n இயற்கை எண்களுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை :

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2$ன் கூட்டுத்தொகைக்கு ஓர் கோவையை யறிதல் :

செய்முறை :

$x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$ என்னும் முற்றொருமையை நோக்குக. இது xன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் ஒக்கும். ஆதலால்,

$x=n,\ (n-1),\ (n-2),\ldots\ldots 3,\ 2,\ 1$ என்று முறையாகப் பிரதியிட்டுப் பார்க்க

$$
\begin{aligned}
n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1\\
(n-1)^3-(n-2)^3 &= 3(n-1)^2-3(n-1)+1\\
(n-2)^3-(n-3)^3 &= 3(n-2)^2-3(n-2)+1\\
3^3-2^3 &= 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1\\
2^3-1^3 &= 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1\\
1^3-0 &= 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1+1
\end{aligned}
$$

இவ்வனைத்தையும் நேர்நேராக மேனேக்கி, இருபக்கங்களிலும் ஒத்த உறுப்புக்களையகப்பட நீக்கிக் கூட்ட $n^3 = 3\Sigma n^2 - 3\Sigma n + n$ ஆம்

$$\therefore \quad 3\Sigma n^2 - 3\Sigma n + n = n^3$$

$$\therefore \quad 3\Sigma n^2 = n^3 + 3\Sigma n - n = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ஆம்}$$

3. முதல் n இயற்கை எண்களுடைய கனங்களின் கூட்டுப்பலனை யறிதல் :

$1^3+2^3+3^3+ \ldots n^3$ க்கு ஒரு கோவையை யறிதல்

$x^4-(x-1)^4 = 4n^3-6x^2+4x-1$ ஆமா றறிவோம்.

இச் சருவ சமன்பாடானது x ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்துமாதலின், $x=n$, $(n-1)$, $(n-2)$......3, 2, 1 என வரிசை யாகப் பிரதியிட்டுத் தக்கபடி சீரமைத்தெழுதலாம் ; அஃதாமாறு ;

$$
\begin{aligned}
n^4-(n-1)^4 &= 4n^3 - 6n^2 + 4n-1\\
(n-1)^4-(n-2)^4 &= 4(n-1)_3-6(n-1)^2+4(n-1)-1\\
(n-2)^4-(n-3)^4 &= 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1\\
3^4-2^4 &= 4\cdot 3^3 - 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 - 1\\
2^4-1^4 &= 4\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 1\\
1^4-1 &= 4\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - 1
\end{aligned}
$$

இவற்றை நேர்மேலாக நோக்கி, இருபக்கங்களிலும் ஒத்த வறுப்புக்களை நீக்கிக் கூட்ட

$$n^4 = 4\Sigma n^3 - 6\Sigma n^2 + 4\Sigma n - n \qquad \text{ஆம்.}$$

$$\therefore \quad 4\Sigma n^3 = n^4 + 6\Sigma n^2 - 4\Sigma n + n \qquad ,,$$

$$= n^4 + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

$$= n[n^3 + (n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1]$$

$$= n[n^3 + 2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1]$$

$$= n[n^3 + 2n^2 + n] = n^2(n^2 + 2n + 1)$$

$$= n^2(n+1)^2$$

$$\therefore \quad \Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

கிளை :

$$\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2$$

ஏனெனில், $\Sigma n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\Sigma n)^2$

ஆகவே, முதல் n இயற்கை எண்களுடைய கனங்களின் கூட்டுத்தொகை = முதல் n இயற்கை எண்களுடைய கூட்டுத்தொகையின் வர்க்கமாகும்.

விளக்க வுதாரணங்கள் :

(1) முதல் n ஒற்றைப்படை எண்களுடைய கனத்தின் கூட்டுப் பலனை யறிக ;

$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots (2n-1)^3$ எனின்

r ஆவது உறுப்பு $(t_r) = (2r-1)^3 = 8r^3 - 12r^2 + 6r - 1$ ஆம்.

$$\therefore \qquad S_n = \sum_1^n t_r = \sum_1^n (8r^3 - 12r^2 + 6r - 1)$$

$$= 8\sum_1^n r^3 - 12\sum_1^n r^2 + 6\sum_1^n r - n$$

$$= \frac{8n^2(n+1)}{4} - \frac{12n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6n(n+1)}{2} - n$$

$= 2n^4 - n^2$ (சுருக்கியபின்) :

2 இத்தொடர் வரிசையின் கூட்டுப்பலனைக் காண்க :

$1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 3 \cdot 4 \cdot 6 + \ldots n$ உறுப்புக்களுக்கு இத்தொடர் வரிசையில் r ஆவது உறுப்பு $= r(r+1)(r+3) = r^3 + 4r^2 + 3r$ ஆம்.

$$\therefore \quad S_n = \sum_1^n t_r = \sum_1^n (r^3 + 4r^2 + 3r)$$

$$= \sum_1^n r^3 + 4\sum_1^n r^2 + 3\sum_1^n r$$

$$= \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+13) \qquad \text{(சுருக்கியபின்)}$$

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினு

3. $1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + \ldots$ என்ற தொடரில் n உறுப்புக்கள் வரைக்கும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க :

இத்தொடர் வரிசையில் n வது உறுப்பு

$t_n = n(n+2)^2 = n^3 + 4n^2 + 4n$ ஆம்.

$$\therefore \quad \sum_1^n t_n = \sum_1^n n^3 + 4\sum_1^n n^2 + 4\sum_1^n n$$

$$= \frac{n^2(+1)^2}{4} + 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 8(2n+1) + 24]$$

$$= n(n+1)(3n^2 + 19n + 32)/12.$$

பயிற்சி 8·6

1. முதல் n இயற்கை எண்களை இரண்டிரண்டாக ஆயின்படி யெல்லாம் சேர்த்தெடுத்துப் பெருக்கி வந்தவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டறிக.

2. கூட்டு விருத்தியிலுள்ள n எண்களின் வர்க்கப் பலன்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டறிக.

3. பின்வருவனவற்றை n உறுப்புக்களுக்குக் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(i) $1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) $1\cdot4\cdot7+4\cdot7\cdot10+7\cdot10\cdot13+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) $3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+7\cdot9\cdot11+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(iv) $1\cdot3\cdot4+2\cdot4\cdot5+3\cdot5\cdot6+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(v) $1^2.2+2^2.3+3^2,4+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(vi) $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots\ldots$

(vii) $1\cdot2^2+3\cdot3^2+5\cdot4^2+7\cdot5^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(viii) $1\cdot4+3\cdot7+5\cdot10+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(ix) $1\cdot3^2+2\cdot4^2+3\cdot5^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(x) $1.n+2(n-1)+3(n-2)+\ldots\ldots n.1$

4. (i) சுருக்குக : $\dfrac{1\cdot2^2+2\cdot3^2+\ldots\ldots n(n+1)^2}{1^2.2+2^2.3+\ldots\ldots n^2(n+1)}$

(ii) காட்டுக :

$$\frac{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots\ldots n(n+1)(n+2)}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots\ldots n(n+1)}=\tfrac{3}{4}(n+3)$$

5. (i) $n(2n+1)(3n+5)$ (ii) $n(2n+3)(3n+7)$ என்பவற்றை n ஆவது உறுப்புக்களாகத் தனித்தனியே பெற்றுள்ள கோவைகளின் கூட்டுத்தொகையை n உறுப்புக்கள் வரையில் கண்டறிக.

6. S_1 என்பது a யிலிருந்து தொடங்கி அடுத்தடுத்து நிற்கும் n முழு எண்களின் கூட்டுத்தொகையாகவும், S_2 என்பது அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையாகவும் குறிக்கப்படுமானால், $n S_2 - S_1{}^2$ என்பது a யினின்றும் தனித்து நிற்பதாகுமெனக் காட்டுவதோடு a ன் மதிப்பையும் கண்டறிக.

7. S_1, S_2, S_3 என்பன முறையே முதல் n இயற்கை எண்களின் கூட்டுத்தொகையையும், வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையையும், கனங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் குறிப்பிடுவனவானால், $9S_2{}^2 = S_3(1+8S_1)$ என்று காட்டுக.

8. ஒரு தொடர்வரிசையில் n ஆவது உறுப்பு $4^n + 2n(n-1)$ எனப்படுமானால், அத் தொடரின் கூட்டுத்தொகையை n உறுப்புக்கள் வரையில் கண்டறிக.

9. அடுத்தடுத்து நிற்கும் எத்தனை முழு எண்களுடைய கனங்களின் கூட்டுத்தொகையானாலும் அஃது அவ்வெண்களின் கூட்டுத் தொகையால் சரியாக வகுபடுவதாகு மெனக்காட்டுக.

10. ஒரு கூட்டு விருத்தியில் நிற்கும் உறுப்புக்களுடைய கனங்களின்கூட்டுத்தொகையானது அவ்வுறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையால் சரியாக வகுபடுமெனக் கண்டறிக.

11. $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\ldots\ldots\ldots$ என்னுந் தொடர் வரிசையில் 10 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கணக்கிடுக.

12. ஒரு தொடர் வரிசையில் n ஆவது உறுப்பு n^3+3^n ஆனால், அத்தொடரின் கூட்டுத்தொகையை n உறுப்புக்கள் வரையில் காண்க.

IX: சேர்மானமும் வரிசைமாற்றமும்

(Combination & Permutation)

I. சேர்மானங்கள் (Combinations)

1. வரைபறை :

வெவ்வேறுபட்ட பொருள்களைக்கொண்ட ஒரு திரளிலிருந்து ஒவ்வொரு தடவையும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான பொருள் களையெடுத்து வரிசைமுறை நோக்காமல் சேர்த்தமைத்த பொறுக்கு வகைகளே சேர்மானங்கள் (Combinations) எனப்படும்.

n வகையான பொருள்களடங்கிய திரளிலிருந்து ஒவ்வொரு தடவையும் r பொருள்களையே எண்ணிக்கைத் தவருமல் எடுத்து வரிசை முறை பாராது அமைத்துக்கொண்ட சேர்மானங்களை $_nC_r$ என்று குறியிட்டாளுவர்.

a, b, c, d என்னும் நான்கு வேறுபட்ட எழுத்துகளிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு இரண்டு வீதம் எடுத்து வரிசை முறை நோக்காமல் சேர்த்தால், ab, ac, ad, bc, bd, cd என ஆறு வகைகள் வரக் காண் கின்ருேம். இதனுன் $_4C_2=6$ ஆதல் அறியப்படும்.

2. $_nC_r$, $_nC_n$களின் மதிப்புக்களைக் காணல் :

n பொருள்களிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு ஒன்ருக எடுத்துச் சேர்த்தால், சேர்க்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கை n என்பது வெளிப் படையாகும். எல்லாப் பொருள்களையும் ஒரே தடவையாக எடுக்கும் விதம் ஒன்றேயாகும். ஆகவே, $_nC_1=n$; $_nC_n=1$ ஆம். ஆனல், $n_1 r$ என்பன பேரெண்களாஞல் பொறுக்கியெடுத்துச் சேர்த்தற்குச்

சாத்தியமான வழிவகைகள் அனைத்தையும் எண்ணியறிந்து எழுதிக் காட்டுதல் எளிதன்று. ஆகவே, ${}_nC_r$க்கு ஒரு சூத்திரத்தை நாம் பெற வேண்டியதாகின்றது.

3. ${}_nC_r$ன் மதிப்பைக் காணுதற்கான சூத்திரம் :

n வகையான பொருள்கள் a, b, c, d......என்பனவாகுக. ஒரு தடவைக்கு r வீதம் எடுத்தமைக்க வந்த சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை ${}_nC_r$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

இனி, எல்லாவிதமான சேர்க்கைகளையும் பூர்த்தியாக எழுதி, அவ்வாறு எழுதப்பட வந்த எழுத்துக்களையெல்லாம் எண்ணி மொத்த எண்ணிக்கையைக் கண்டறியப் புகுவதாகக் கருதுவோம். இதனை யிரண்டு வித வழிகளால் செய்யலாம்.

(i) மொத்தம் ${}_nC_r$ சேர்மானங்களுள் ஒவ்வொன்றிலும் r எழுத்துக்கள் கண்ணுற்று நிற்கும். ஆகவே, ${}_nC_r$ சேர்மானங்கள் அனைத்திலும் காணப்படும் எழுத்துக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $r \times {}_nC_r$ ஆகும்.

(ii) மறுபடியும், ${}_nC_r$ சேர்மானங்களை a வருவனவும், b பயில்வனவும், C நிற்பனவும் என இவ்வாறு எழுத்துதோறும் கண்டறிந்து தொகுப்புச் செய்யலாம். a என்னும் எழுத்துப் பயின்றுவரும் தடவைகளைக் காணுதற்கு, aஐ தனிப்பட வைத்து, எஞ்சிய $(n-1)$ எழுத்துக்களிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு $(r-1)$ எழுத்துக்கள் வீதம் பொறுக்கியமைத்த ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்மானங்களுள் ஒவ்வொன்றுடனும் a ஐ இணைக்கலாம். இவ்வாறு a ஐச் சார்த்திவந்த சேர்மானங்கள் ${}_{n-1}C_{r-1}$ ஆம். இதைப்போலவே எல்லா n எழுத்துக்களுக்குஞ் செய்ய எழுத்துக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $n \ {}_{n-1}C_{r-1}$ ஆம்.

$$\therefore \quad r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1} \text{ ஆம்.}$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = \frac{n}{r} \times {}_{n-1}C_{r-1} \text{ ஆம்.}$$

இவ் வொடுக்கல் சூத்திரத்துள் (Reduction formula) nக்கு வரிசையாக $n-1$, $n-2$ முதலாகிய மதிப்புக்களையும் கொடுத்து அவ்வாறு வருவனவற்றைப் பின்வருமாறு அமைத்து நிறுத்தலாம்:

$$_nC_r = \frac{n}{r} \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

$$_{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1}\ {}_{n-2}C_{r-2}$$

$$_{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2}\ {}_{n-3}C_{r-3}$$

$\therefore\ _{n-(r-2)}C_{r-(r-2)}$ அஃதாவது

$$_{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}_{n-r+1}C_1$$

$$_{n-r+1}C_1 = n-r+1$$

இருபக்கங்களிலும் ஒத்த உறுப்புக்களை நீக்கி, நேர்மேலாகப் பெருக்கி நோக்க

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots\ldots 1}$$ எனவரும்

4. காரணீய குறியீட்டுமுறை (Factorial Notation)

அடுத்தடுத்த முதல் n இயற்கையெண்களின் பெருக்கற்பலனை $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ என்று குறிப்பது வழக்கம். எவ்வாறெனின்,

$n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ என்பது போலாகும்.

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots 1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\ \{(n-r)(n-r-1)\ldots 1\}}{r!\ \{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots 1\}}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\therefore\ _nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

5. நிரப்பும் சேர்மானங்கள்

n பொருள்களில் ஒரு தடவைக்கு r ஆகப் பொறுக்கியெடுத்தவற்றின் சேர்மான எண்ணிக்கையானது n பொருள்களில் ஒரு தடவைக்கு $(n-r)$ ஆக எடுத்த சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சரியாகும். எவ்வாறெனில்,

$$_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\,\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}={}_nC_r.$$

கிளை :

$_nC_x={}_nC_y$ ஆனால், $x=y$ ஆகவேனும் $x+y=n$ ஆகவேனும் இருக்கவேண்டும்.

$_nC_r={}_nC_{n-r}$ ஆனது எண்கணித செயல் முறைகளைச் சுருக்குவதில் அதிக பயனுடையதாகும். உதாரணமாக,

$$_{100}C_{98}={}_{100}C_{(100-98)}={}_{100}C_2=\frac{100\times 99}{1\times 2}=4950.$$

6. $_nC_0$! ; 0 ! ஆகியவற்றின் விவரணங்கள் :

நாம் கொடுக்கும் விளக்கம் $_nC_r={}_nC_{n-r}$ என்னும் சமத்துவத்திற்கு ஒத்ததாயிருக்கவேண்டும்.

$r=0$ என்றிட, $_nC_0={}_nC_n$.
ஆனல் $_nC_n=1$ என்றறிவோம்.

$\therefore$ $_nC_0$ ஆனது ஒன்று என்று விளக்கம் எய்துவதாகும்.

$\therefore$ $_nC_0=1$.

மறுபடியும், 0 ! என்றதன் பொருளைப் பின்வருமாறும் பெறலாம் :

$_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ என்பதை அறிவோம்.

$r=n$ என்று இடுவோமானல், மேற்கண்ட பலனில்

$_nC_n=\frac{n!}{n!\,0!}=\frac{1}{0!}$ எனப் பெறப்படும்.

ஆனல், $_{n}C_{n}=1$.

$$\therefore \qquad 1=\frac{1}{0!} ;\ 0!=1$$

∴ **0 ! என்பது ஒன்று என்று விளங்குவதாகும்.**

7. $_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$ என்று நிரூபித்தல்

n பொருள்களைத் தடவைக்கு r ஆக எடுக்க அமைகின்ற சேர்மானங்களின் தொகையைப் பின்வரும் இரு பகுதிகளாகப் படுத்தலாம் :

(i) ஒவ்வொரு சேர்மானத்திலும் ஒரு குறிப்பிட்ட a என்னும் பொருளைக்கொண்டிருக்கும் சேர்மானங்களும்

(ii) அக்குறிப்பிட்ட பொருளைப் பெருத சேர்மானங்களும் என இரண்டாம்.

(i) ஐப் பெற, முதலில் a ஐ அப்பாற்படுத்தி வைப்போம். எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு $(r-1)$ பொருள்களாக எடுக்கவருந் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றனேடும் a ஐச் சேர்த்தால், $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து $(r-1)$ பொருள்களை $_{n-1}C_{r-1}$ வகைகளாகப் பொறுக்கி எடுக்கலாம்.

(ii) ஐப் பெற, a ஐ அடியோடு அகற்றி, எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுத்துச் சேர்மானங்கள் அமைத்தால் $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து r பொருள்கள் $_{(n-1)}C_{r}$ வகைகளாகப் பொறுக்கி யெடுத்தமைக்கப் படலாகும்.

ஆகவே, $_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$

மறுவழி :

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி வலப்பக்கத்தி னுள்ளவற்றைச் சுருக்குதல் செய்து காண்க

8. அடிப்படையான வெளிப்படையுண்மை (Fundamental axiom)

ஒரு செய்வகையானது m வேறு வழிகளில் செய்யப்பட்டு, அதன் பிறகு அவற்றுள் யாதேனு மொரு வழியில் செயயப்பட்டதும், இரண்டாவது செய்வகையானது n வேறு வழிகளில் செய்யப்படக் கூடுமானல், இவ்விரண்டு செய்வகைகளையும் உடன்கூட்டி mn வேறு வழிகளால் செய்வதற்காகும்.

ஏனெனில், முதல் செய்வகைக்குரிய m வழிகளுள் ஒவ்வொன்றிற்கும் இரண்டாவது செய்வகையில் n வழிகள் செயக்கிடத்தலால், இவ்விரு செயல்வகைகளும் ஒருங்கியையும்பொழுது mn வழிகள் பிறக்குமாறு அறியப்படும்.

உதாரணம் 1 :

5 ஆசிரியர்களும் 15 மாணவர்களும் உள்ள தொகுதியிலிருந்து 3 ஆசிரியர்களும் 2 மாணவர்களும் அடங்கிய குழுவை எத்தனை வழி களில் அமைக்கலாம் ?

5 ஆசிரியர்களிடையேயிருந்து 3 ஆசிரியர்களை ${}_5C_3$ வகையில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். 15 மாணவர்களிடையேயிருந்து 2 மாணவர்களை ${}_{15}C_2$ வகையில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$\therefore$ இருவகையிலும் சேர்ந்து தேர்ந்தெடுக்கும் கூட்டு வகைகள் ${}_5C_3 \times {}_{15}C_2$ ஆகும். ஆகவே, குழுவை அமைக்கும் வழிவிதங்கள்

$${}_5C_3 \times {}_{15}C_2 = 10 \times 105 = 1050 \text{ ஆம்.}$$

உதாரணம் 2 :

எட்டுக் காங்கிரஸ்காரர்களும் 6 சோஷலிஸ்டுகளும் உள்ள தொகுதியிலிருந்து அறுவரைக் கொண்ட குழுவை அமைக்குங்கால், காங்கிரஸ்காரர்களுக்கே பெரும் பங்கு கிடைக்கவும், குறைந்தது ஒரு சோஷலிஸ்டாவது அங்கம் வகிக்கவும் இசையும்படி அக்குழுவை எத்தனை வகைகளில் அமைகலாம்.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

செய்முறை :

6 பேர்களில், பெரும் பங்கு காங்கிரஸ்காரர்களுக்குக் கிடைக்க வேண்டுமானல், அவர்களுக்கு $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ அஃதாவது, $\left(\frac{6}{2}+1\right)=4$ இடங்கள் ஒதுக்கப்படல் வேண்டும்.

$\therefore$ 4 காங்கிரஸ்காரர்களும் 2 சோஷலிஸ்டுகளும் சேர்ந்தேனும், 5 காங்கிரஸ்காரர்களும், 1 சோஷலிஸ்டும் சேர்ந்தேனும் அக் குழுவை தனித்தனியாக அமைக்கலாம்.

இவை முறையே ${}_{8}C_{4}\times{}_{6}C_{2}$ வழிகளிலும் ${}_{8}C_{5}\times{}_{6}C_{1}$ வழிகளிலும் அமையும்.

ஆகவே, கொடுத்த நிபந்தனைப்படி, அக்குழுவை ${}_{8}C_{4}\times{}_{6}C_{2}+{}_{8}C_{5}\times{}_{6}C_{1}$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

அஃதாவது, $70\times15+56\times6=1050+336=1386$ வழிகளாகும்.

பயிற்சி 9·1

1. மதிப்பைக் காண்க: (i) ${}_{20}C_{0}$ ii) ${}_{15}C_{3}$ iii ${}_{50}C_{48}$ (iv) ${}_{35}C_{25}$.

2. எத்தனை வகைகளில் 14 மனிதர்களிலிருந்து 11 மனிதர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவார்கள்.

[விடை : 364]

3. எத்தனை விழிகளில் 15 புத்தகங்களிலிருந்து 5 புத்தகங்கள் பொறுக்கியெடுக்கப்படும். இவற்றுள் எத்தனை வழிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட புத்தகத்தைப் (i) பெற்றிருக்கும் (ii) பெருதிருக்கும்.

[விடை : 3003, 1001, 2002]

4. (i) ${}_{17}C_{3r-1}={}_{17}C_{2r+7}$ ஆனுல், rன் மதிப்பு யாது?

[விடை : $r=5$]

(ii) ${}_{n}C_{r}=15$ என்றல், nன் மதிப்பையறிக.

[விடை : $n=6$]

5. n பக்கங்களையுடைய ஒரு பலகோண வுருவம் எத்தனை மூலை விட்டங்களை யுடையதாகும். இதன் உச்சிகளைச் சேர்ப்பதால் எத்தனை முக்கோணங்கள் உண்டாகும்.

$$\left[\text{விடை :} \quad \frac{n(n-3)}{2}, \; nC_3\right]$$

6. இந்துக்கள் எழுவரும் பாரசீகர் ஐவரும் உளர். இவர்களி லிருந்து நால்வர் அடங்கிய குழுவையமைக்குமிடத்து ஒரு பாரசீகராவது அதில் இடம்பெறவேண்டும் என்றால், எத்தனை வழிகளில் இக்குழுவை அமைக்கலாம்?

[விடை : 460]

7. பன்னிரண்டு சோஷலிஸ்டுகளும் ஒன்பது கன்சர்வேடிவ்களும் உள்ள கூட்டத்திலிருந்து பன்னிருவரைக் கொண்ட குழுவை அமைக்க நேருகிறது. இக் குழுவில் குறைந்த பட்சம் 2 கன்சர்வேடிவ்களாவது அங்கம் பெறவேண்டும். அப்பொழுதும் சோஷலிஸ்டுகளுக்கே மெஜா ரிட்டி (பெரும்பங்கு) கிடைக்க வேண்டும் என்றால், இக் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

8. பொருளியலில் 6 நூல்களும், கணிதத்தில் 3 நூல்களும், கணக் கியலில் இரண்டு நூல்களும் உள. இப்பதினொரு நூல்களிலிருந்து ஒவ் வொரு பாடத்திலும் குறைந்த பட்சம் இரண்டுபுத்தகங்களேனும் இடம் பெறும்படி எத்தனை வழிகளில் 8 புத்தகங்களைப் பொறுக்கித் தொகுக் கலாம்?

[விடை : 65]

9. ஏழு ஆடவரும், 4 மகளிரும் கொண்ட பகுதியிலிருந்து அறு வரைக் கொண்ட குழுவொன்றை அமைக்க வேண்டும். அக் குழுவில் (i) சரியாக இரண்டு மகளிரே இடம் பெறுவதானாலும் (ii) குறைந்த பட்சம் இரண்டு மகளிரேனும் இடம் வகிக்க வருமானாலும் அக் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

[விடை : 210, 371]

10. கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு, துடுப்புப் பந்தாட்டத் திற்கு வேண்டிய 11 பேர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

(i) ஆட்டக்காரர் பதின்மூவர். அவர்களில் இருவரே முனை யிடத்தைப்பற்றி நிற்கக் கூடியவர்.

(ii) ஆட்டக்காரர் இருபதின்மர். இவர்களில் குறிப்பிட்ட ஐவர் விளையாடியாகவேண்டும். எஞ்சியோருள் இருவரில் ஒருவரை முனையிடத்தைக் காத்து நிற்கத் தேர்ந்தெடுத்தாக வேண்டும்.

[விடை : 132 ; $2 \times 14C_5$]

11. பதினொரு ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட துடுப்புப் பந்தாட்டத்திற்கு ஏழு பேரையுடைய குழுவிலிருந்தும் 9 பேரையுடைய குழுவிலிருந்தும் ஆட்டக்காரர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியதா கின்றது. இதில் எழுவரைக் கொண்டுள்ள குழுவானது ஐவருக்குக் குறையாமல் ஆட்களைக் கொடுக்கவேண்டுமெனக் கருதப்பட்டால், இதன்படி எத்தனை வழிகளில் ஆள்பொறுக்கு முறைகளை மேற்கொள்ள லாகும் ?

[விடை : 2772]

12. 7 இந்துக்கள் 3 முஸ்லிம்கள் 2 ஹரிஜனர் கூடிய தொகுதியி லிருந்து எண்மரைக் கொண்ட மந்திரி சபையை யமைக்குங் காலத்தில் எம்மதமும் பிரதிநிதித்துவம் பெறுதொழிதல் கூடாது. இச் சபையில் முஸ்லிம்களின் எண்ணிக்கைக்கு ஹரிஜனர் தொகை எப்பொழுதும் குறைந்திருக்கவும் கூடாது என்ருல், இதனை எத்தனை வழிகளில் செய்யலாம் ?

[விடை : 210]

13. ஆறு ஆசிரியர்களும் 4 மாணவர்களும் உள்ள தொகுதியி லிருந்து 8 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இக் குழுவில் (i) 4 ஆசிரியர்களுக்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டும். (ii) ஆசிரியர் களே பெரும்பங்கு இருக்க வேண்டும் என்ற விதிகளுக்கு ஏற்ப தனித் தனியே இக் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம் ?

[விடை : 45, 30]

14. ஒன்பது பேரை உள்ளேயும், 6 பேரை வெளியேயும் சுமந்து கொண்டு போகக்கூடியதோர் உந்து வண்டியில் 15 பேர் பிரயாணம் செய்ய வேண்டியதாகின்றது. இவர்களுள் மூவர் வெளியிலிருப்பதற்கும்'

இருவர் உள்ளே போவதற்கும் இசையாதவர்களானுல், இக்கூட்டத்தினர் எத்தனை வகையில் தம்மை இடம்படுத்தி யமரக் கூடும்?

[விடை: 210]

15. ஒரு இருப்புத் தொடர் வண்டி (Train) யானது சென்னையிலிருந்து திருவள்ளூருக்குச் செல்லுகையில் இடையே ஒன்பது நிலையங்களில் நிற்பதாகும் என்ருல், 5 வகையான தனியாள் மூன்ரும் வகுப்புப் பயணச்சீட்டுகளில் எத்தனைவகையான தொகுதிகள் கிடைக்கப் பெறுவனவாகும். இவற்றுள் எத்தனை தொகுதிகள் பயணச்சீட்டுகளில் ஒன்றின் மேலாவது முடிவு நிலையத்தின் அடையாளத்தைப் பொறிக்கப் பெற்றிருக்கும்?

16. ஐந்து ஆங்கிலேயரும் 4 அமெரிக்கர்களும் உள்ள தொகுதியிலிருந்து ஐவரைக்கொண்ட குழுவொன்றை அமைக்கவேண்டிய பொழுது எந்த தேசத்தாரையும் மூவருக்குமேல் கொள்ளுதலாகாது என்ற நிபந்தனை யேற்பட்டால், அக்குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்.

[விடை: 100]

17. ஒரு அலுவலகத்தில் மூன்று டைப் அடிப்போர் (தட்டெழுத்தாளர்; Typists) இடங்களும், இரண்டு ஆவணத்துணைவர் (Clerks) களின் இடங்களும் காலியாகக்கிடந்தன. முன்னிடங்கள் பெண்கள் மட்டும் வகிக்கத்தக்கன; பின்னிடங்களில் ஓரிடமாவது ஆண்களுக்கு ஒதுக்கப்படல் வேண்டும். இவ்வுத்தியோக ஸ்தானங்கள் எல்லாம் வெவ்வேருனவைகளாகும். அவற்றிற்கு 5 பெண்களும், 4 ஆண்களும் விண்ணப்பம் செய்திருந்தால், அவ்விடங்களை எத்தனை வழிகளில் நிரப்பலாம்?

[விடை: 140]

18. மூன்று முஸ்லிம்களும், 50 இந்துக்களுமாகிய மாணவர்களைக் கொண்டதொரு பள்ளிக்கூடத்திற்கு நான்கு உபகாரச் சம்பளங்கள் கிடைக்கப்பெறும். இவற்றை வழங்கப் பெறுவோருள் ஒரு முஸ்லிம் மாணவனுவது இருக்கவேண்டுமென்பது நிபந்தனையானுல், இதனை எத்தனை வழிகளில் வழங்கலாம்?

[விடை: 62525]

19. பதினாறு காங்கிரஸ்காரர்களும், 12 சோஷலிஸ்டுகளும் ஆக உள்ளவர்களிடையே 3 சோஷலிஸ்டுகளும் 7 காங்கிரஸ்காரர்களும் கொண்ட குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

[விடை : $_{16}C_7 \times {}_{12}C_3$]

20. A என்பவன் 5 புத்தகங்களையும், B என்பவன் 6 புத்தகங்களையும் வைத்திருக்கிறார்கள். Aயின் புத்தகங்களுள் இரண்டனை Bயின் புத்தகங்களில் இரண்டனுக்கு எத்தனை வழிகளில் பரிவர்த்தனம் செய்யலாம்?

[விடை : 150]

21. இருப்புவண்டித்தொடர் வழியில் பதினொரு நிற்கும் நிலையங்கள் உள்ளன. ஒருபிரயாணி ஒரு நிலையத்திலிருந்து மற்றொரு நிலையத்திற்குப் பிரயாணம் செய்வதற்குச் சாத்தியமாகும்படி பயணச் சீட்டுகளை எத்தனை வகைகளாக அச்சடிக்கவேண்டும்?

[விடை : 110]

22. ஒரு துடுப்புப்பந்தாட்டக்கழகம் (cricket club) 14 அங்கத்தினரைக் கொண்டுள்ளது. இவர்களுள் ஐவர்தான் பந்தை எறியக் கூடியவ ராவர். பந்தெறியக் கூடியவர்கள் குறைந்தது மூன்று பேராவது இருக்கும்படி பதினொருவரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

[விடை : 354]

II. வரிசை மாற்றம் (Permutations)

1. வரையறை

n வெவ்வேறுபட்ட பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r பொருள் களாகக் கண்டெடுத்துச் சாத்தியப்பட்டபடியெல்லாம் வரிசைப் படுத்தும் வகையினது எண்ணிக்கை ${}_nP_r$ என்று குறிக்கப்படும்.

ஒரு சேர்மானத்தில், உள்ள பரிமாணங்கள் எம்மாதிரி யேனும் வரிசைப்படுத்தப்படலாம். அவற்றின் அடுக்குகள் அவற்றிற்குரிய சேர்மானங்களின் தன்மையைப் பாதிக்கமாட்டா.

ஒரு தொகுப்பில் a, b, c என்னும் மூன்று பொருள்கள் இருந்தால், அவைகள் எந்த வரிசைக்கிரமத்தில் அடுக்கப்பட்டன வானுலும், அதே மூன்று பொருள்கள் ஒவ்வொரு தொகுப்பிலும் ஒவ்வொரு தடவையும் புகுதலால், அவையனைத்தும் ஒரு சேர்மானத்தையே அமைவுறுத்துவன வாகும். ஆனுல், ஒவ்வொரு அடுக்கும் ஒரு புதுமாதிரியான வரிசை மாற்றத்தை அமைக்கின்றதாகும். எவ்வாறெனின், a, b, c என்னும் மூன்று எழுத்துக்களில் தடவைக்கு மூன்ருக எடுத்து வரிசைப் படுத்தினுல், abc, acb, bca, bac, cab, cba என வெவ்வேருன வரிசை நிலைகள் வரும். ஆனுல், சேர்மானம் என்னும் நோக்கத்தால் இவை யனைத்தும் ஒரே சேர்மானம் மாகக் கருதப்படும்.

2. nP_r ஐ கணிக்க ஒருசூத்திரத்தை வருவித்தல் :

ஒரு வரிசையில் r வெற்றிடங்கள் இருப்பனவாகக் கருதுவோம். n பொருள்களிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு r பொருள்களாக எடுத்துச்

சாத்தியப்பட்ட வழி யெல்லாம் செய்த அடுக்குகளின் எண்ணிக்கை யானது n பொருள்களை ஒவ்வொன்றாக எடுத்து r வெற்றிடங்களையும் வரிசையாக நிரப்புவதற்கு நிகராகும். n பொருள்களுள் ஒன்றனை முதல் வெற்றிடத்தில் இடலாம். ஆகவே, முதல் வெற்றிடம், n வேறு வழி களில் நிரப்பப்படலாம். அதன்பின், இரண்டாவது காலியிடம் $(n-1)$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். இவ்வாறு முதலதாகிய காலியிடத்தை நிரப்பும் ஒவ்வொரு வகைக்கும் இரண்டாவது காலியிடம் $(n-1)$ வகையில் நிரப்பப்படக் கிடத்தலால், முதலிரண்டு இடங்களையும் நிரப்பு வதற்கு $n(n-1)$ வழிகள் உளவாதல் அறியப்படும்.

இவ்வாறே வாதத்தை நிகழ்த்திச்செல்ல, r காலியிடங்களை $n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$ வகையில் நிரப்பக்கூடுமெனக் காண் கின்றோம்,

$$\text{ஆகவே,}\quad {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\;.....(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

கிளை :

$${}_nP_0 = 1\;;\quad {}_nP_1 = n\;;\quad {}_nP_n = n\,!$$

3, ${}_nC_r$ க்கும் ${}_nP_r$ க்குமுள்ள தொடர்பு

n பொருள்களில் தடவைக்கு r ஆக எடுப்பதால் வாய்க்கும் வரிசை மாற்றங்களைப் பின்வருமாறும் பெறலாம் :

முதலில் n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுக்க வரும் சேர்மானங்களை அமைத்துக்கொள்க. பிறகு, ஒவ்வொரு சேர்மானத்தி லுள்ள r பொருள்களை அவை தமக்குளே வரிசை மாற்றஞ் செய்க. இம்முறையால், n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுத்தமைப் பதற்குச் சாத்தியமாகிய எல்லா அடுக்குக்களையும் பெறலாகும்.

இப்பொழுது n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுக்க எய்தும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை ${}_nC_r$ ஆகும். ஒவ்வொரு சேர்மானத்திலும் உள்ள பொருள்களை அவை தமக்குள்ளே சாத்தியமான ஒவ்வொரு வகையிலும் அடுக்கினால், அப்பொழுது ஒவ்வொரு சேர்மானமும் P_r அல்லது $r!$ வரிசை மாற்றங்களைத் தரும்,

ஆகவே, எல்லா ${}_nC_r$ சேர்மானங்களும் ${}_nC_r \times r!$ வரிசை மாற்றங்களைக் கொடுக்கும்.

$$\therefore \quad {}_nP_r = {}_nC_r \times r!$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

மறுவழி

நாம் ஏற்கெனவே,

(i) ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ என்றும்

(ii) ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ என்றும் நிருபித்தோம்.

ஆகவே, ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = r!\ \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = r!\ {}_nC_r$

$$\therefore \quad {}_nP_r = r!\ {}_nC_r$$

விளக்க மாதிரிகள் :—

1. 0, 3, 5, 6, 7, 8 என்னும் இலக்கங்களைக் கொண்டு, ஒரு முறை வந்த எண் திரும்பியும் வாராதபடி எத்தனை மூன்றிலக்கமுள்ள ஒற்றைப்படை யெண்களை அமைக்கலாம்.

கொடுத்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு, 3 இடங்களை நாம் கொடுக்கப்பட்ட இலக்கங்ளால் பூர்த்தி செய்யவேண்டும்.

ஒற்றைப்படை எண்களே தேவை யானதால், கடைசி ஸ்தானம் 3 அல்லது 5 அல்லது 7 ஆகவே அமையவேண்டும். ஆகையால் கடைசி ஸ்தானம் 3 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். இப்படி மேற்கொள்ளும் ஒவ்வொரு வழியிலும் 2 ஒற்றைப்படை எண்கள் விடுபட்டுப் போய் விடும். 0, தவிர மேலும் இரண்டு இலக்கங்கள் உள்ளன. ஆகவே, முதல் ஸ்தானத்தில் 0 வரக்கூடாததால், முதல் ஸ்தானத்தை நிரப்ப 4 இலக்கங்களே வாய்ப்பன. எனவே, முதல் ஸ்தானத்தை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். இப்படி முதல் ஸ்தானத்திற்கு ஒரு இலக்கமும், கடைசி

ஸ்தானத்திற்கு ஒரு இலக்கமும் போக, மீதி உள்ள 4 இலக்கங்களில் 0 உள்பட ஏதேனும் ஒரு இலக்கம் இடைஸ்தானம் வகிக்கலாம். ஆகையால், இடை ஸ்தானம் ஏதேனும் 4 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

ஆகவே, 3 காலியிடங்களையும் $4\times4\times3$ வழிகளில் நிரப்பலாம்.

$\therefore$ மூன்றிலக்க ஒற்றைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை $=48$.

2. $_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$ **என நிரூபி**

$a,\ b,\ c\ldots\ldots$ என n பொருள்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுத்து அமைக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, முறையே $a,\ b,\ c,\ \ldots$ என்னும் பொருள்கள் முதலிடத்தில் கொண்டுள்ள வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுப்பலனுக்குச் சமமாகும். இப்பொழுது a ஐ முதலாவது இடத்தில் பெற்றுள்ள வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, இதர $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு $(r-1)$ ஆக எடுத்து வரிசை மாற்றம் செய்து ஒவ்வொன்றிலும் a ஐ முதலிடத்தில் அமைக்கக் கிடைக்கும். இந்த எண்ணிக்கையை $_{n-1}P_{r-1}$ எனக் குறிக்கலாம்.

இதைப்போல b ஐ முதலிடத்தில் கொண்டுள்ள வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $_{n-1}P_{r-1}$ ஆகும். தொடர்ந்து மற்றஎழுத்துக்களுக்கும் இதைப்போலவே காண,

$$P_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1} \text{ ஆகும்.}$$

மறுவழி :

$$n\times{}_{n-1}P_{r-1}=n\times\frac{(n-1)\,!}{\{(n-1)-(r-1)\}\,!}=\frac{n\,!}{(n-r)\,!}={}_nP_r.$$

3. 'Father' என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களை வரிசை மாற்றம் செய்து பெற்றவற்றை அகராதி முறைப்படி அமைத்தால் கொடுத்த சொல் எத்தனையாவது இடத்தில் காணப்படும்?

செய்முறை :

கொடுத்த சொல்லில் 6 எழுத்துக்கள் உள்ளன.

A யுடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்கள் முதலில் வரும். பின் B யுடன் துவங்கும் சொற்கள் இடம் பெறும். பிறகு மற்றைய எழுத்துக்கள் தொடர்புற்று வரும்.

A யுடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை, A க்கு அடுத்து வரும் இதர 5 எழுத்துக்களையும் வரிசை மாற்றம் செய்து பெறும் எண்ணிக்கையே யாம். இந்த எண்ணிக்கை 5 ! ஆகும்.

அடுத்து E யுடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 5 ! ஆகும்.

பிறகு, F உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்கள் வரும். அவற்றுள் FAE உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்கள் முதலில் வரும். அவைகளின் எண்ணிக்கை 3 ! ஆகும்.

FAH உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 3 ! ஆகும்.

FAR உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 3 ! ஆகும்.

பிறகு FATE உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 2 ! ஆகும். அடுத்த சொல் FATHER ஆகும்.

∴ அகராதியில் இந்த சொல்லின் இடம் $5!+5!+3!+3!+3!+2!+1$ ஆகும்.

அஃதாவது, $120+120+6+6+6+2+1=261$ ஆவது இடமாகும்.

பல்கலைக்கழக மாதிரி வினாக்கள்

1. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள 4 சகோதரர்களும் 3 சகோதரிகளும் ஒரு நேர் வரிசையில் அமரவைக்க வேண்டுமிடத்து (i) எல்லாச் சகோதரிகளும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து உட்காரலாம் (ii) எவ்விரண்டு சகோதரிகளும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து உட்காரலாகாது என்னும் நிபந்தனைகள்படி இது எத்தனை வழிகளில் செய்யப்படக்கூடும்?

செய்முறை :

(i) மூன்று சகோதரிகளையும் ஒரு தொகுதியாகக் கொள்க. இச் சகோதரிகள் தமக்குள்ளே $_nP_3=3!$ வழிகளில் வரிசைப்பட்டு அமரலாம். 4 சகோதரர்களோடு ஒரு தொகுதிப்பட்ட சகோதரிகளையும் கூட்டி வெவ்வேறு பட்டவர்களாகப் பார்த்து வரிசைமாற்றம் செய்தால், அது $_5P_5=5!$ வழிகளாகும். ஆகவே தொகுதியாகக் கொண்ட

சகோதரிகளுடைய வரிசை மாற்றங்களையும் இவற்றையும் உடன் இணைத்து நோக்கினால் சகோதரிகளின் ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றத்திற்கும் சகோதரர்களுக்கான $_5P_5$ வரிசை மாற்றங்களும் உறழ்ந்து வரக் காண்கின்றோம். ஆகவே, மொத்தம் $_3P_3 + _5P_5$ அல்லது $3! \times 5! = 120 \times 6 = 720$ வரிசை மாற்றங்கள் வந்தமையும்.

(ii) எவ்விரு சகோதரிகளும் சேர்ந்து உட்காரக்கூடாதென்றால், முதலில் இடைவெளி விட்டு 3 சகோதரிகளையும் அமரச் செய்யலாம். அவர்களுக்கு இடையே இரண்டு வெளியிடம் இருக்கும். இப்பால் முன்னே முகப்பில் ஒருவனையும் அப்பால் பின்னே இறுதியில் ஒருவனையும் இடைவெளிகளில் ஒவ்வொருவனையும் அமரச் செய்தால் எவ்விரு சகோதரிகளும் உடனுகை இருக்கக் காணப்படார். சகோதரிகளை மட்டும் அவரவர்க்குரிய இடங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்தமர்த்த $_3P_3$ வழிகள் ஏற்படும். சகோதரர்களை மட்டும் அவரவர்களுக்குரிய இடங்களில் வரிசை மாற்றஞ் செய்தமர்த்த $_4P_4$ வழிகள் ஏற்படும். இப்பொழுது, சகோதரிகளுக்காம் வரிசை மாற்றங்களோடு சகோதரர்களுக்காம் வரிசை மாற்றங்களையும் உறழ்ந்து காண மொத்தம் $_3P_3 \times {}_4P_4$ அல்லது $3! \times 4! = 24 \times 6 = 144$ வரிசை மாற்றங்கள் வந்தெய்தும்.

2. ஒரு தேர்வுக்கு ஆறு வினாத்தாள்கள் ஏற்படுத்தப்பட்டுள்ள. இவற்றுள் இரண்டு தாள்கள் கணித பாடத்தைச் சார்ந்தனவாகும். கணித பாடத்திற்குரிய தாள்கள் அடுத்தடுத்து வராதபடி தேர்வுகளை எத்தனை வழிகளாக நியமிக்கலாம்?

மொத்த வரிசை மாற்றங்கள்கள் $_6P_6 = 6!$ ஆகும்.

இதில், (i) கணிதத்தாள்கள் அடுத்தடுத்து வரும் வரிசை மாற்றங்களும், (ii) அவைகள் அவ்வாறு அடுத்தடுத்து வாராதனவாக, எஞ்சியுள்ள வரிசை மாற்றங்களும் சேர்ந்து அடங்கியுள்ளன.

கணிதத்தாள்கள் மட்டும் அடுத்தடுத்து வரும் வரிசை மாற்றங்கள் $_2P_2 \times {}_5P_5 = 2!\,5!$ ஆகும்.

ஆகவே, கணிதத்தாள்கள் அடுத்தடுத்து வாராதனவாக நிற்கத் தேர்வுகளை வரிசைப்படுத்தும் வழிகள் $6! - 2!\,5!$ ஆகும். அதாவது $6.5! - 2!\,5! = 4.5! = 4 \times 120 = 480$,

பயிற்சி 9·2

1. மதிப்பைக் கண்டறிக: (i) ${}_{12}P_4$ (ii) ${}_5P_5$

[விடை: 11880; 120]

2. 2, 4, 5, 7, 8 என்னும் எண்களைக்கொண்டு ஒருமுறை வந்த எண் திரும்பியும் வராதபடி, நான்கிலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்?

[விடை: ${}_5P_4$]

3. 1, 2, 3......9 என்பவற்றுள் யாவையேனும் ஆறிலக்கங்களை யுபயோகித்து வெவ்வேருன எண்கள் எத்தனை யமைக்கலாம்?

[விடை: ${}_9P_6$]

4. குறிப்பிட்ட இரண்டு தாள்கள் சேர்ந்துவர லாகாமல் பத்துப் பரீட்சைத் தாள்களை எத்தனை வகையாக வரிசைப்படுத்தலாம்?

[விடை: $8 \times 9!$]

5. ஆறு பொருளியல் நூல்களும், மூன்று கணித நூல்களும், இரண்டு கணக்கியல் நூல்களும் ஒரடுக்குத் தட்டில் இடம்பெறும் பொழுது ஒரே பொருளைப்பற்றிய நூல்கள் ஒருங்கு நிற்கலாமென்ருல், இவற்றை எத்தனை வகையாக வரிசைப்படுத்தலாம்?

[விடை: $3! \times 6! \times 3! \times 2!$]

6. ஐந்து சிறுவர்களும், மூன்று சிறுமிகளும் ஒரு நேர் வரிசையில் நிறுத்தப்படும்பொழுது (i) இரண்டு பெண்கள் சேருதல் கூடாது (ii) எல்லாப் பெண்களும் ஒருசேர நிற்கலாம் என்ருல் இவற்றை எத்தனை வரிசை மாற்றங்களாகச் செய்யலாம்?

[விடை: 14400; 4320]

7. Strange என்னும் எழுத்துக்களை வரிசை மாற்றஞ் செய்யுங் கால் உயிரெழுத்துக்கள் ஒற்றையிடங்களில்தான் இருக்கலாமென்ருல் எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் வரும்?

[விடை: 1440]

8. ஒன்பது மெய்யெழுத்துக்களையும் நான்கு உயிரெழுத்துக்களையுங் கொண்டு சொற்களையமைக்குங்கால், இரண்டு உயிரெழுத்துக்களும் 4 மெய்யெழுத்துக்களுமே பயிலப் பெறும் சொற்கள் எத்தனை வரும்?

[விடை: ${}_9C_4 \times {}_4C_2 \times 6!$]

9. 1, 2, 3, 4 இலக்கங்களை வந்தது மீண்டும் வாராதபடியறிந்து வரிசை மாற்றம் செய்ய வந்த எண்களை மதிப்பு நோக்கி ஏறும் வரிசையில் முறைப்படுத்தியெழுதினால், அவ்வெண்களிடையே 3241 என்னும் எண் எந்த இடத்தில் நிற்பதாகும்?

[விடை: 56]

10. Mother என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களை வரிசை மாற்றம் செய்து பெற்றவற்றை அகராதி முறைப்படி அடுக்கினால் கொடுத்த சொல்லானது எவ்விடத்தில் காணக் கிடக்கும்?

[விடை: 309]

11. 0, 1, 2,......9 என்னும் இலக்கங்களைக் கொண்டு எத்தனை

(i) ஐந்திலக்கமுள்ள எண்களை அமைக்கலாம்.

[விடை: $9 \times {}_9P_4$]

(ii) மூன்றிலக்கமுள்ள ஒற்றைப்படையெண்களையமைக்கலாம்.

[விடை: 320]

(iii) நான்கிலக்கமுள்ள இரட்டைப்படையெண்களையமைக்கலாம்.

[விடை: 2296]

12. 1, 2, 3, 4 என்னும் இலக்கங்களை ஒவ்வோர் எண்ணிலும் ஒரு முறையே உபயோகித்து அமைத்துக்கொண்ட எல்லா எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டறிக.

[விடை: 66660]

13. எட்டுத் துடுப்புடைய படகொன்றில் எட்டு பேருளர். இவர்களுள் மூவர் ஒருபக்கத்திலும் இருவர் மற்ற பக்கத்திலும் மட்டுமே துடுப்பைப் பிடித்து ஓட்ட முடியும் என்றால், பக்கத்துக்கு நால்வர்களாக இவர்களை எத்தனை வகைகளில் வரிசையாக அமர்த்தலாம்?

[விடை: 1728]

14. ${}_{n}P_{r} = {}_{n-1}P_{r} + r \times {}_{n-1}P_{r-1}$ என நிறுபி.

15. எழுத்துப் பூட்டொன்றில் 3 வளையங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வளையத்திலும் 5 வேறு எழுத்துக்கள் பொறிக்கப்பட்டுள்ளன. திறவுச் சொல்லை (key word) யறியாதானொருவன் அப்பூட்டைத் திறக்க முயற்சிக்கையில் எத்தனை முயற்சிகள் பயன்படாது போகுமெனக் கண்டறிக.

[விடை: 215]

16. Nature என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களை வரிசை மாற்றஞ் செய்யுங்கால் (i) உயிரெழுத்துக்கள் ஒருங்கு வரலாம் (ii) அவ்வாறு வருதலாகா என்றால், இவற்றை எத்தனை விதங்களில் அமைக்கலாம்?

[விடை: 144; 144]

17. எட்டு விநோதப் பெட்டிகளுள அவற்றுள் எட்டு பொம்மைகள் அடுக்கப்படவேண்டும். இரண்டு பெட்டிகள் ஐந்து பொம்மைகள் அடங்கமுடியாத அளவுக்குச் சிறியனவாகும் என்றால், அவை எத்தனை வகைகளில் அடைக்கப்படும்?

[விடை: 4320]

18. பக்கத்துக்கு எண்மராக அமரக்கூடியதொரு நீண்ட மேஜையின் மேல் 16 பேருக்காக ஒரு தேனீர் விருந்து ஏற்பாடாயிற்று. அவர்களுள் நால்வர் ஒரு பக்கத்திலும், இருவர் மறுபக்கத்திலுமே அமரவிரும்பினால், அவர்களை எத்தனை வகையாக அமர்த்தலாம்?

[விடை: $210 \times (8!)^2$]

19. a, b, c, d, e, f என்பவற்றுள் மும்மூன்றாக எடுத்து சொல்லமைப்பு செய்யுங்கால் ஒவ்வொன்றும் குறைந்தது ஒருயிரெழுத்தாவது கொண்டு நிற்கும்படி வரிசை மாற்றம் செய்தால், எத்தனை சொற்கள் அங்ஙனம் அமைவன வாகும்?

[விடை: 96]

20. 5 இந்துக்கள், 3 முஸ்லிம்கள், 2 கிருத்துவர்கள் ஒரு வரிசையில் அமர்த்தப்பட வேண்டும். கிருத்துவர்கள் முதல் நாலு இடங்களைத் தவிர பிற இடங்களில் அமரக்கூடாது என்ற நிபந்தனைகளையொட்டி எத்தனை வழிகளில் அவர்களை வரிசையாக அமர்த்தலாம் என்று காண்க.

[விடை: 172800]

X. ஈருறுப்புத்தேற்றம் (Binomial Theorem)

1. ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை எவ்வளவு (தனராசி முழு எண்ணுகிய) அடுக்குக்கு வேண்டுமென்றாலும் உயர்த்துவதற்கு ஈருறுப்புக் கோவை நமக்கு உதவி செய்கின்றது. இதனால் உண்மையாகவே பெருக்கிக் காணும் முயற்சியில் ஏற்படும் உழைப்பு வருத்தத்தைத் தவிர்க்கக் காண்கின்றோம். **கி. பி. 1665க்கு அண்மையில் சர் ஐஸக் நியூடன் என்பவர் இத்தேற்றத்தை வெளியிட்டார்**

2. $(x+a)^n = x^n + nC_1 x^{n-1} a + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots {}_nC_r x^{n-r} a^r + \ldots\ldots a^n$ **என்று நிரூபி.**

$(x+a)$ ஆனது x, a யில் ஒன்றுவதுபடி ஓரினக் கோவையாகும். ஆகவே, $(x+a)^n$ ஆனது x, a யில் n ஆவதுபடி ஓரினக்கோவையாதல் வெளிப்படையாம். ஆகவே, a^r ஐப் பெற்றுள்ள வுறுப்பு x^{n-r}ஐயும் பெற்றிருக்கும். இதுபற்றிக் கோவையின் விரிவு நிலையில் $x^n, x^{n-1}a, x^{n-2}a^2, \ldots\ldots x^{n-r}a^r, \ldots\ldots a^n$ என்னும்படிவமுள்ள வுறுப்புக்கள் மட்டுமே இடம் பெற்று நிற்பனவாகும். $x^{n-r}a^r$ என்னும் படிவுடைய வுறுப்பைப் பெறுவதற்கு, நாம் n காரணிகளுள் யாவையேனும் r காரணிகளிலிருந்து aஐ தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். எஞ்சிய $(n-r)$ காரணிகளிலிருந்து x ஐத் தெரிந்தெடுத்து, அவற்றைச் சேர்த்துப் பெருக்க வேண்டும். இப்பொழுது யாவையேனும் r காரணிகளை n காரணிகளிலிருந்து nc_r வழிகளில் தெரித்தெடுக்கலாம். இங்ஙனமாகிய ஒவ்வொரு வழிக்கும் அதற்கு ஒத்ததாகிய $x^{n-r}a^r$ படிவமுள்ள வுறுப்பு வந்தமையும். ஆகவே, $x^{n-r}a^r$ படியுடைய பெருக்கற்பலன்கள் nC_r சேர்மானத்திற்குக் கிடைக்கப் பெறும்.

∴ விரிப்பின் பொது வுறுப்பு $nC_r\ x^{n-r}a^r$ ஆகும்.

∴ பெறவேண்டிய விரிவாமாறு:

$$\sum_{r=0}^{n} nC_r\ x^{n-r}a^r = x^n + nC_1\ x^{n-1}a + \ldots\ldots nC_n\ x^{n-r}a^r + \ldots\ a^n$$

கிளை : $(1+x)^n = 1 + {}_nC_1\ x + {}_nC_2\ x^2 + {}_nC^3\ x^3 + \ldots\ldots x^n$

விளக்க உதாரணம்

$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{39}$ ன் விரிவில் x சாராத தனி யுறுப்பையும், 7வது உறுப்பையும் கண்டறிக.

பொது வுறுப்பு :

$${}_{39}C_r(x^2)^{39-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_{39}C_r\ x^{78-2r}(-1)^r\ \frac{1}{x^r}$$

$$= (-1)^r\ {}_{39}C_r\ x^{78-3r} \text{ ஆம்.}$$

(i) தனியுறுப்பைப் பெற, $78-3r=0$ ஆதல் வேண்டும்.

∴ $r=26$

∴ தனியுறுப்பு $=(-1)^{26}\ {}_{39}C_{26} = {}_{39}C_{26}$ ஆம்.

(ii) 7வது உறுப்பைப் பெற, $r=6$ என்றிடல் வேண்டும்

∴ 7 வது உறுப்பு $= (-1)^6\ {}_{39}C_6\ x^{78-18} = {}_{39}C_r\ x^{60}$

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினாக்கள்

1. $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{17}$ ன் விரிப்பில் x^{11} ன் குணகத்தைக் காண்க.

$(x+a)^n$ ல், $(r+1)$ ஆவ்து உறுப்பு $nC_r\ x^{n-r}a^r$ ஆகும்.

ஆகவே, $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)$ ல், $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு

$$= {}_{17}C_r (x^2)^{17-r} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r$$

$$= {}_{17}C_r \; x^{34-2r} \frac{(-2)^r}{x^{2r}}$$

$$= {}_{17}C_r (-2)^r \, x^{34-4r}$$

இவ்வுறுப்பு x^{11} ப் பெற்றிருக்குமாஞல்

$x^{34-4r}=x^{11}$, அதாவது $34-4r=11$ ஆம்.

,, $4r=23$ அல்லது $r=5\frac{3}{4}$.

r ஒரு கலப்புப் பின்னமாதலின், x^{11} கண்ணுறும் உறுப்பே இல்லா தொழியும்.

ஆகவே, x^{11} ன் குணகம் 0 ஆகும்.

2. n ஆனதொரு தனராசி முழு எண்ணுகுமிடத்து $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$ ல் x ஐச் சாராத தனியுறுப்புக் காணநிற்குமெனில், n ன் மதிப்பு 5 ன் மடங்காகுமென்று காட்டுக.

$n=20$ ஆகுமிடத்து இவ்வுறுப்பைக் கண்டெழுதுக.

$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$ ல் பொதுவுறுப்பு $nC_r(\sqrt{x})^{n-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r$ ஆகும்.

$$= {}_nC_r(-2)^r . x^{\frac{n-r}{2}} . x^{-2r}$$

$$= {}_nC_r(-2)^r . x^{\frac{n-5r}{2}}$$

இவ்வுறுப்பில் x காணுதுகழியுமாஞல், $\frac{n-5r}{2}=0$ ஆக வேண்டும்.

அஃதாவது $n=5r$ ஆம்

r என்பது முழு எண்ணுகுமாதலின், n ன் மதிப்பு 5 ன் மடங்காதல் வலியுறும்.

இனி, $n=20$ என்றால், $r=4$ ஆகும்.

$\therefore$ x சாராத தனியுறுப்பு ${}_{20}C_4(-2)^4={}_{20}C_4 \cdot 16$ ஆம்.

$$=16 \cdot {}_{20}C_4$$

3. $\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^{21}$ ன் விரிப்பில் இரண்டு நடுவுறுப்புக்களைக் கண்டெழுதுக.

செய்முறை :

$$T_{r+1}={}_{21}C_r\,(2x^2)^{21-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r=2^{21-r} \cdot 3^r \cdot {}_{21}C_r\, x^{42-3r}$$

இக்கோவையின் விரிப்பில் T_{11} ம் T_{12} ம் நடுவுறுப்புக்களாகும். ஆகவே, அவற்றைக் கண்டறிய பொதுவுறுப்பில் முறையே $r=10$, $r=11$ என்று பிரதியிட வேண்டும்.

$r=10$ ஆனால், $T_{11}=2^{21-10} \cdot 3^{10} \cdot {}_{21}C_{10}\, x^{42-30}$

$$=2^{11} \cdot 3^{10} \cdot {}_{21}C_{10}\, x^{12}$$

$r=11$ ஆனால்,

$$T_{12}=2^{21-11} \cdot 3^{11} \cdot {}_{21}C_{11}\, x^{42-33}$$

$$=2^{10} \cdot 3^{11} \cdot {}_{21}C_{11}\, x^9$$

4. $(1+x)^{44}$ ன் விரிப்பில் 21 ஆவது 22 ஆவது உறுப்புக்கள் சமனொத்து நின்றால், x ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

$(1+x)^n$ கோவையின் விரிவிலையில் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பாவது $nC_r\, x^r$ ஆகும்.

$(1+x)^{44}$ ன் விரிப்பில் 21 வது உறுப்பாவது ${}_{44}C_{20}\, x^{20}$ ஆகும்.

,, ,, 22 வது ,, ${}_{44}C_{21}x^{21}$ ஆகும்.

கணக்கின்படி,

$${}_{44}C_{21}\, x^{21}={}_{44}C_{20}\, x^{20}$$ ஆகும்.

$$\frac{x^{21}}{x^{20}} = \frac{{}_{44}C_{20}}{{}_{44}C_{21}}$$

$$= \frac{44!}{20!\,24!} \div \frac{44!}{21!\,23!}$$

$$= \frac{44!}{20!\,24!} \times \frac{21!\,23!}{44!}$$

$$= \frac{44! \times 21 \times 20! \times 23!}{20! \times 24 \times 23! \times 44!}$$

$$= \frac{21}{24} = \frac{7}{8}.$$

ஆகவே, $x = \frac{7}{8}$ ஆம்

பயிற்சி 10·1

1. விரித்தெழுதுக :

   (i) $(3a-2b)^7$ (ii) $(1+2x)^8$

2. $\left(x^8 - \frac{2}{x^2}\right)$ ன் விரிப்பில் x^{81} ன் குணகத்தைக் காண்க.

   [விடை : $16 \times {}_{12}C_4$]

3. $\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{x^2}\right)^{24}$ ன் விரிப்பில் x சாராத தனியுறுப்பைக் கண்டெழுதுக.

   [விடை : $16 \times {}_{20}C_4$]

4. $\left(ax - \frac{b}{cx^2}\right)^{12}$ ல் x இயையாத தனியுறுப்பை யறிக

   [விடை : ${}_{12}C_8 \cdot a^8(b/c)^4$]

5. $(3x-x^2)^{17}$ல் x^{21} ன் குணகத்தைக் கண்டறிக.

   [விடை : ${}_{17}C_4 \cdot 3^{13}$]

6. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{15}$, $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^8$ களில் நடுவுறுப்புக்களைக்கண்டறிக.

7. $(a^2-b)^{12}$ ன் விரிப்பில் ஆருவது உறுப்பைக் கண்டெழுதுக.

[விடை : $12C_5a^{14}b^5$]

8. $\left(\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{3}{2x}\right)^9$ ல் x சாராத தனியுறுப்பைக் காண்க.

[விடை : x சாராத உறுப்பு இல்லை]

9. $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{20}$ ன் விரிப்பில் x^8, x^{-8} ன் குணகங்களைக் கண்டெழுதுக.

10. $(1+x)^n$ ன் விரிப்பில் r ஆவது, $(r+1)$ ஆவது, $(r+2)$ ஆவது உறுப்புக்களின் குணகங்களைக் காண்க. இவை ஹார்மோனிக் விருத்தியிருந்தால் $n^2-n(4r-1)+4r^2=0$ என்று காட்டுக.

11. $(1+x)^n$ ன் விரிப்பில் 5 வது, 6 வது, 7 வது உறுப்புக்கள் கூட்டுவிருத்தியி லிருந்தால் n ஐக் காண்க.

[விடை : $n=7$ அல்லது 14]

12. $(1+ax)^n$ ல் n ஆனதொரு தனராசி முழு எண்ணுகுமாளுல், அக்கோவையின் விரிப்பில் முதல் மூன்றுறுப்புக்கள் $1+6x+16x^2$ ஆகுமெனின், a, n களைக் கண்டறிக.

13. $(1+x)^{43}$ ன் விரிப்பை x ன் அடுக்கு நோக்கி ஏறு வரிசையில் எழுதுங்கால், $(2r+1)$ ஆவது $(r+2)$ ஆவது உறுப்புக்களின்குணகங்கள் சமமாளுல் r ஐக் கண்டறிக.

[விடை : $r=14$]

14. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 11 ன் 7 வது அடுக்கின் பலனைக் காண்க.

15. $\left(x-\dfrac{3}{5x^2}\right)^7$ ன் விரிப்பில் $\dfrac{1}{x^5}$ ன் குணகத்தைக் காண்க.

[விடை : ${}_7C_3\times\dfrac{3^4}{5^4}$]

16. $(2x^2-3x)^{10}$ ன் விரிப்பில் x^{15} ன் குணகத்தைக் காண்க.

[விடை : ${}_{10}C_5\times6^5$]

17. n ஆனதொரு தனராசி முழு எண்ணுகுமிடத்து $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$ ன் விரிப்பில் x ஒடு கலவாததோர் உறுப்புக் காணப்படுமாஞல், n என்பது 5 ன் மடங்காகுமென்று காட்டுக. $n=20$ ஆகும் பொழுது இவ்வுறுப்பைக் கண்டெழுதுக.

18. $(1+x)^{44}$ ன் விரிப்பில் 21 ஆவது, 22 ஆவ்து உறுப்புக்கள் சமமாஞல், x ன் மதிப்பை அறிக.

[விடை : $x=\frac{7}{8}$]

19. $(1+x+x^2)(1-x)^{14}$ ன் விரிப்பில் x^{13} ன் குணகத்தைக் காண்க.

[விடை : -13]

20. $(1+x)^{10}$ ன் விரிப்பை x^4 வரும் உறுப்பு வரையில் எழுதி, அவ்வாறெழுதிய பகுதியை யுபயோகித்து $(1{\cdot}01)^{10}$ ன் மதிப்பை 5 தசாம்ச ஸ்தான சுத்தமாகக் கூறுக.

21. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^{10}$ ன் விரிப்பில் x சாராத வுறுப்பைக் கண்டெழுதுக.

[விடை : $\frac{5}{48}$]

22. $(1+x)^{18}$ ன் விரிப்பில் $(2r+4)$ ஆவது, $(r-2)$ ஆவது உறுப்புக்களின் குணகங்கள் சமமாகுமாஞல், r ன் மதிப்பை யறிக.

[விடை : $r=6$]

23. $(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})^{20}$ ன் விரிப்பில் x கூடாத தனியுறுப்பினைக் காண்க.

[விடை : $20c_{10}$, 6^{10}]

24. $(1-x)^8$ ன் விரிப்பை x^3 கண்ணுறவரும் உறுப்பு வரையில் எழுதி, அதை உபயோகித்து $\left(\frac{49}{50}\right)^8$ ன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்க.

25. $(x+a)^n$ ன் விரிப்பில், மூன்றாவது, நான்காவது, ஐந்தாவது உறுப்புக்கள் முறையே 84, 280, 560 ஆகும் எனின், x, a, n களைக் கண்டறிக.

[விடை : 1, 2, 7]

26. $(1+x)^n$ ன் விரிப்பில், அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புக்களின் குணகங்கள் முறையே 6, 15, 20 ஆனால், n ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $n=6$]

27. $(1+x)^n$ ன் விரிப்பில், இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது உறுப்புக்களின் குணகங்கள் கூட்டுவிருத்தியிலிருந்தால், $n^2-9n+14=0$ எனக் காட்டுக.

28. $(1+x)^{2n}$ ன் விரிப்பில் x^n ன் குணகம், $(1+x)2^{n-1}$ ன் விரிப்பில் x^n ன் குணகத்தைப்போல் இரு மடங்காகுமென நிருபி.

29. $(1+x)^{23}$ ன் விரிப்பில், r ஆவது உறுப்பின் குணகமும், $(r+1)$ ஆவது உறுப்பின் குணகமும் 1 : 5 விகிதத்தில் இருந்தால், r ன் மதிப்பைக் கண்டறிக

[விடை: $r=4$]

30. $(1+x)^{2n}$ன் விரிப்பில் நடுஉறுப்பு $= \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2^{n-1})}{n!} 2^r x^n$ என்று காட்டுக.

3, n படி ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவமைப்பில் உள்ள குணகங்களின் (Coefficents) தன்மைகளும், அவற்றைத் தழுவிய சில முற்றொருமைகளும் :

ஈருறுப்புக் குணகங்களாகிய ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$...... ${}_nC_r$.......nc^u என்பவற்றை Co, C_1, C_2, என்று சுருக்கி வரைவது வழக்கமாகும்.

(i) $Co+C_1+C_2+\ldots\ldots C_n=2^n$ என்று காட்டுக

நாம் $(1+x)^n=Co+C_1x+C_2x^2+\ldots C_nx^n$ எனப் பெற்றிருக்கின்றோம்.

இம் முற்றொருமை xன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும்.

இருபக்கங்களிலும் $x=1$ என்று பிரதியிட்டால்,

$\therefore \qquad 2^n=C_0+C_1+C_2+\ldots\ldots C_n$ எனவரும்.

அஃதாவது, ஈருறுப்புக் குணகங்களின் கூட்டுப்பலன் $=2^n$ ஆகும். மொத்தம் $(n+1)$ குணகங்கள் உளவாதலைக் குறிக்கொள்க.

(ii) நிரூபித்தல் ; $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots\ldots + (-1)^n C_n = 0$

$(1+x)^n = C_0 + C_1 x \quad C_2 x^2 + \ldots\ldots C_n x^n$ என்னும் முற்றொருமையில் $x = -1$ என்று இருபக்கங்களிலும் பிரதியிட

$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 + \ldots\ldots (-1)^n C_n$ ஆம்.

அதாவது $C_0 - C_1 + C_2 + \ldots\ldots (-1)^n C_n = 0$ ஆம்

(iii) நிரூபித்தல் ; $C_0 + C_2 + C_4 \ldots\ldots = C_1 + C_3 + C_5 \ldots\ldots = 2^{n-1}$

மேல் (ii) காட்டியதிலிருந்து, இடம் மாற்றுவகையால்

$C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots\ldots$

ஆகவே, இவற்றுள் ஒவ்வொரு பக்கத்துக் கோவையும்

$= \frac{1}{2} (C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots c_1 + C_3 + C_5 + \ldots\ldots)$

என்னும் மதிப்பைப்பெறும்.

$= \frac{1}{2} (C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$,,

$= \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$

$\therefore \quad C_0 + C_2 + C_4 \ldots\ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots\ldots = 2^{n-1}$ ஆம்

விளக்க வுதாரணங்கள்

(1) $C_0 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 + \ldots\ldots \frac{1}{n+1} C_n$ என்னும் தொடரின் கூட்டுப் பலனையறிக.

தொடரின் கூட்டுத்தொகையை S என்று குறிக்க

இப்பொது, $C_0 = {}_nC_0 = 1;\ C_1 = {}_nC_1 = n;\ C_2 = {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

$$\therefore \quad S = 1 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[(n+1) + \frac{1}{2} (n+1) n + \frac{1}{3} \frac{n(n+1)n}{1 \cdot 2} + \ldots + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[{}_{n+1}C_1 + {}_{n+1}C_2 + {}_{n+1}C_3 \ldots\ldots + {}_{n+1}C_{n+1} \right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[{}_{n+1}C_0+{}_{n+1}C_1+{}_{n+1}C_2+\ldots\ldots+{}_{n+1}C_0\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right]$$

உதாரணம் 2 : கூட்டுக : $C_0+2C_1+3C_2+\ldots\ldots(n+1)Cn$

$C_0+2C_1+3C_2+\ldots\ldots(n+1)C_n$

$$=(C_0+C_1+C_2+\ldots\ldots C_n)+(C_1+2C_2+3C_3+{}_nC_n)$$

$$=2^n+\left[\frac{n}{1}+\frac{2n(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\ldots n\right]$$

$$=2^n+n\left[1+\frac{(n-1)}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}+\ldots\ldots 1\right]$$

$$=2^n+n[1+1]^{n-1}$$
$$=2^n+n\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}(n+2)$$

மறுவழி :

$S=C_0+2C_1+3C_2+\ldots nC_{n-1}+(n+1)C_n$ ஆகுக. (1)
இப்பொழுது, $C_r={}_nC_r={}_nC_{n-r}=C_{n-r}$

$\therefore\ C_n=C_0;\ C_{n-1}=C_1;\ C_{n-2}=C_2\ldots\ldots;\ C_0=C_n$

கொடுத்த தொடரை முன் பின்னாக மாற்றி வரிசைப்படயெழுதி மேலே பெற்ற பலன்களையும் பயன்படுத்திக்கொள்ள, நாம்

$S=(n+1)\ C_0+nC_1+\ldots\ldots 2C_n+C_n$ எனப்பெறுகின்றோம். (2)
இனி, (i), (ii) களில் காட்டியவற்றைக் கூட்டிக்கொள்ள,

$2S=(n+2)C_0+(n+2)C_1+\ldots\ldots+(n+2)\ C_{n-1}+(n+2)C_n$
ஆகும்.

$$=(n+2)\ (C_0+C_1+\ldots+C_n)$$
$$=(n+2)\cdot 2^n$$
$$\therefore\ S=(n+2)\cdot 2^{n-1},$$

பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு

$(1+x)^n$ன் விரிநிலையில், $C_0, C_1, C_2 \ldots$ என்பன குணகங்களானுல், $2C_0+5C_1+8C_2+\ldots$ என்னும் தொடரின் கூட்டுப்பலனையறிக :

கொடுத்த தொடர் வரிசையின் கூட்டுப்பலனை S என்று குறிப் பிட்டால்,

$$S=2C_0+5C_1+8\cdot C_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(2+2n)C_n \quad \text{(i)}$$

இனி ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ என்றதனை யுபயோகித்தால்

${}_nC_n=nC_0$ அதாவது $C_n=C_0$ என்றும்

${}_nC_{n-1}={}_nC_{n-(n-1)}={}_nC_1$ அல்லது $C_{n-1}=C_1$ என்றும்

இவ்வாறே பிறவும் கொள்ளுதற்கு ஆகும். இவற்றைப் பயன்படுத்தி வரிசைக் கிரமத்தை முன்பின்ளுக மாற்றியெழுதலாம். ஆகவே,

$S=(3n+2)C_0+(3n-1)C_1+(3n-4)C_2+2C_n$ எனவமையும்

(i), (ii) களில் காட்டியவற்றைக் கூட்ட, (ii)

$2S=(3x+4)C_0+(3n+4)C_1+\ldots\ldots(3n+4)C_n$ என வரும்.

$$=(3n+4)\,(C_0+C_1+\ldots\ldots C_n)$$

$$=(3n+4).2^n$$

$\therefore\ S=(3n+4)\dfrac{2^n}{2}=(3x+4)\times 2^{n-1}$ ஆம்.

பயிற்சி 10·2

1. $2C_0+3C_1+5C_2+\ldots(2n+3)\,C_n$ — இத்தொடரைக் கூட்டுக.

2. $2C_0+5C_1+8C_2+11C_3+\ldots\ldots(3n+2)\,C_n$ — இத்தொடரைக் கூட்டுக.

3. $8C_1+7C_2+11C_3+\ldots\ldots n$ உறுப்புக்களுக்கு — இத்தொடரைக் கூட்டுக.

4. நிரூபிக்க :

$C_2+2C_3+3C_4+\ldots\ldots(n-1)$ உறுப்புக்களுக்கு $=1+(n-2)2^{n-1}$

5. தொடர்களைக் கூட்டுக :

(i) $C_0-2C_1+3C_2\ldots\ldots+(-1)^n(n+1)C_n$

[விடை ; 0]

(ii) $C_1-2C_2+3C_3-4C_4+\ldots\ldots(-1)^{n-1}{}_nC_n$

[விடை ; 0]

(iii) $C_1+2C_2+3C_3+\ldots\ldots{}_nC_n$

[விடை ; $n \cdot 2^{n-1}$]

6. தொடரைக் கூட்டுக :

$$C_0-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\frac{C_3}{4}+\ldots\ldots(-1)^n\frac{C_n}{n+1}$$

[விடை : $\frac{1}{n+1}$]

7. காட்டுக :

$$\frac{C_0}{1}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_4}{4}+\ldots\ldots=\frac{2^n}{n+1}$$

8. காட்டுக :

$$\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+\ldots\ldots=\frac{2^{n-1}}{n+1}$$

9. நிரூபிக்க :

$$\frac{C_1}{1}+\frac{2C_2}{C_1}+\frac{3C_3}{C_2}+\ldots\ldots+n.\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$$

10. காட்டுக :

$$(C_0+C_1)(C_1+C_2)\ldots\ldots(C_{n-1}+C_n)=C_0C_1C_2\ldots C_{n-1}=\frac{(n+1)^n}{n!}$$

11. நிரூபிக்க :

$$C_0^2+C_1^2+C_2^2+\ldots\ldots C_n^2={}_{2n}C_n$$

12. நிரூபிக்க ;

$$C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 \ldots\ldots + (-1)^n C^2_n = 0$$ (n ஒற்றைப்படையானால்), அல்லது $(-1)^{n/2} \cdot \frac{n!}{(\frac{1}{2}n)!}$

13. மதிப்பறிக :

$$C_0C_2 + C_1C_3 + \ldots + C_{n-2}C_n$$

14. காட்டுக :

$$C_0C_r + C_1C_{r+1} + \ldots + C_{n-r}C_n = \frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$$

விடைகள்

பயிற்சி 1·1

6. (i) $p+q+r+s+t=0$ (ii) $p-q+r-s+t=0$

(iii) $p+r+t=0$; $q+s=0$

11. $q=-1$ or $\frac{3}{2}$; $4x^2-3x+3$; $4x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

20. (ii) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(2x+1)$.

பயிற்சி 1·2

1. (i) $-(a-b)(b-c)(c-a)$ (ii) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

(iii) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (iv) $3(a-b)(b-c)(c-a)$

(v) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(vi) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(vii) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(viii) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

(ix) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

(x) $(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

(xi) $-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(xii) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(xiii) $-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(xiv) $5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

2. (i) $-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$

(ii) $(a+b)(b+c)(c+a)$ (iii) $(a+b)(b+c))c+a)$

(iv) $3(a+b)(b+c)(c+a)$ (v) $24xyz$

(vi) $3(x+2y+z)(y+2z+x)(z+2x+y)$

(vii) $12xyz(x+y+z)$

(viii) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(ix) $-4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

4. (i) 0 (ii) 1(iii) $(x+y+z)$

(iv) $(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

பயிற்சி 2·1

8. (i) $(625)^{50}$ (ii) 9^{50} (iii) 64^{50}; 5^{200} பெரியது

பயிற்சி 2·2

7. (i) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$ (ii) $\frac{5^{\frac{1}{3}}+1}{6}$ (iii) $\frac{4^{\frac{1}{3}}-1}{3}$

பயிற்சி 3·2

1. 3, 1, 2, $\bar{2}$, $\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{1}$, 5

2. 0·4043; 2·4043; $\bar{3}$.4048; 5·4043; 6·4043

4. இரண்டாவது தசமஸ் தானம், முதல் தசமஸ் தானம்; 6வது தசம ஸ்தானம்.

5. 1·97; 197; ·000197

6. (i) 2·1003 (ii) 1·9242 (iii) ·4737

(iv) ·1575 (v) 3·7090

9. (i) $x=\pm\frac{\log 5}{\log 6}$

(ii) $x=\log 4-\log 3$ அல்லது $\log 3-\log 4$

(iii) $x=\dfrac{\log 4}{\log 3}$ அல்லது $\dfrac{\log 5}{\log 3}$

(iv) $x=0$ அல்லது $\dfrac{\log 4}{\log 3}$ (v) $x=0$ அல்லது -2.

10. (i) $x=\dfrac{\log 3}{\log 3-\log 2}$; $y=\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}$

(ii) $x=\dfrac{2 \log 4 \log 50}{\log 50 \log 3-\log 5 . \log 4}$

$y=\dfrac{2 \log 4 \log 5}{\log 50 \log 3-\log 5 . \log 4}$

(iii) $x=2{\cdot}71$; $y=1{\cdot}71$

11. (i) 90·2 (ii) 37·1 (iii) ·1114 (iv) ·1472
(v) ·008249 (vi) 1287 (vii) 7·467

12. (i) 7 இலக்கங்கள் (ii) 4 வது தசமஸ்தானம்

13. (i) 21 இலக்கங்கள் (ii) 21 வது தசமஸ்தானம்

பயிற்சி 5·2

1. (i) p^2-2q (ii) $-p^3+3pq$ (iii) $-p\sqrt{p^2-4q}$

2. (i) $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$ (ii) $\dfrac{b(b^2-4ac)}{c^3}$ (iii) $\dfrac{b(b^2-3ac)}{a^2c}$

9. $p^5-5p^3q+5pq^2$

10. (i) $\dfrac{b^2-ac}{a^2}$ (ii) $\dfrac{b^2(b^2-4ac)}{a^4c^2}$ (iii) $\dfrac{(b^2-3ac)(b^2-ac)}{a^4}$

(iv) $\dfrac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$ (v) $\dfrac{b^2+2ak^2-2a(c+bk)}{c+ak^2-kb}$

பயிற்சி 5·3

1. (a) (i) $x^2-x-6=0$ (ii) $6x^2-x-1=0$
(iii) $5x^2-26x+5=0$ (iv) $(x-2)(x+3)(5x-7)=0$
(v) $18x^2-39x+20=0$ (vi) $mx^2-(m^2+1)x+m=0$

5. $x^2-2x+12=0$

6. $x^2-(a^2+2a-2b+2)x+(a+b+1)^2=0$

8. (i) $x^2-(p^2-2q-4)x+\{q^2-2(p^2-2q)+4\}=0$

(ii) $x^2+(m+1)px+q(1+m^2)+m(p^2-2q)=0$

(iii) $qx^2+p(2q+1)x+(2q+1)^2=0$

9. (i) $a^2cx^2-(3abc-b^3)x+ac^2=0$

(ii) $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

(iii) $a^3x^2-a(b^2+2ac)x+c(2b^2+ac)=0$

(iv) $a^2x^2+ab(m+n)x+mn(b^2-2ac)+ac(m^2+n^2)=0$

(v) $acx^2+b(c+2a)x+(c+2a)^2=0$

(vi) $ax^2-(2ka-hb)x+(h^2c-bhk+k^2a)=0$

பயிற்சி 5·4

1. (i) a யும் b யும் மாறுபட்ட ராசிக்குறிகளைக் கொள்ள வேண்டும்; a யும் c யும் ஒரே ராசிக்குறியைக் கொள்ளவேண்டும்.

(ii) a, b, c மூன்றும் ஒரே ராசிக்குறியைக் கொள்ளவேண்டும்.

(iii) a யும், c யும் மாறுபட்ட ராசிக்குறிகளைக் கொள்ள வேண்டும்.

(iv) $b=0$ (v) $a=c$ (vi) $2b^3 \cdot 9ac$

(vii) $(b^2-2ac^2)^2=ac(a+c)^2$ (viii) $b^2-a^2d^2=4ac$

(ix) $c=0$ (x) $a=0$ (xi) $b=0=c$ (xii) $a=0=b$

2. $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\frac{b}{a}=0$

பயிற்சி 5·5

1. (i) மூலங்கள் கற்பனையாம் (ii) நிச, சம, விகிதமுறு ராசியாம் (iii) நிச, அசம, விகிதமுறு ராசியாம் (iv) நிச, அசம, விகிதமுரு ராசியாம் (v) கற்பனையாம் (vi) நிச, அசம, விகிதமுறு ராசியாம் (vii) நிச, அசம, விகிதமுறு ராசியாம் (viii) நிச, சம, விகிதமுறு ராசியாம்.

பயிற்சி 5·6

1. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{mb'} = \frac{c}{m^2c'}$

2. (ii) $(ba'-cb')(ab'-bc') = (cc'-aa')^2$

3. $\frac{b^2-4ac}{a^2} = \frac{B^2-4AC}{A^2}$ 7. $\frac{c(ca-b^2)}{a(bc-a^2)}, \frac{a(ca-b^2)}{b(bc-a^2)}$

பயிற்சி 5·7

21. x ஆனது -1க்கும் 5க்கும் இடைபட்டு நிற்கும்; y ஆனது -2க்கும் 10க்கும் இடைப்பட்டு நிற்கும்.

23. x ஆனது $-\frac{3}{2}$க்கும் $\frac{7}{2}$க்கும் இடைப்பட்டு நிற்கும்; y ஆனது $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\sqrt{2}$க்கும், $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}$க்கும் இடைப்பட்டு நிற்கும்.

பயிற்சி 7

1. $x=2, y=\frac{1}{3}$; $x=-2, y=3$ 2. $x=y=1$

3. $x=\frac{4\mp\sqrt{14}}{3}, \ y=\frac{-4\pm\sqrt{14}}{3}$

4. $x=1, -\frac{6}{5}; \frac{-1\pm\sqrt{409}}{34}; y=2, -\frac{12}{5}, \frac{-1\pm\sqrt{409}}{17}$

5. $x=-2, y=5$; $x=5$; $y=-2$ 6. $x=-\frac{1}{2}, y=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

7. $x=\pm 1, y=\pm 3$; $x=\pm 2\sqrt{2}, y=\pm\sqrt{2}$

8. $x=2, y=0$; $x=0, y=2$

9. $x=1, y=-3$; $x=-1, y=3$; $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{4}, \ y=\frac{1\mp\sqrt{19}}{4}$

10. $x=2, y=3$; $x=3, y=2$; $x=-3+\sqrt{3}, y=-3-\sqrt{3}$;
$x=-3-\sqrt{3}, y=-3+\sqrt{3}$

11. $x=-\frac{7}{8}$, $y=-\frac{14}{3}$; $x=2$, $y=4$

12. $x=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{20}$, $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{20}$

13. $x=1, y=-3$; $x=-1, y=$ 14. $x=2, y=3$; $x=3, y=2$

15. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$; $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}$ 16. $x=1, y=3$; $x=3, y=1$

17. $x=\pm\frac{4}{3}$; $y=\pm\frac{5}{3}$ 18. $x=\pm 1, y=\pm 3$; $x=\pm 3$; $y=\pm 3$

19. $x=2, y=4$; $x=4, y=2$ 20. $x=-1, y=1$; $x=3, y=-8$

21. $x=4, y=2$; $x=-4, y=-2$ 22. $x=1, -5$; $-2\pm 2\sqrt{2}$

23. $x=\pm\sqrt{2}, y=\pm 6\sqrt{2}$; $x=\pm 7$; $y=\pm 5$

பயிற்சி 8·1

1. (i) 6, 9, 12, 15, 18 (ii) 47, 43, 39,......11 (iii) $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$,..............$-\frac{29}{4}$ 22 : $P-\dfrac{(p-1)(P-Q)}{p-q}$; $\dfrac{P-Q}{p-q}$

24. $\dfrac{-(p+q)(p-q-1)+3pq}{pq}$; $-(p+q)$ 34. (i) $-\dfrac{3n}{2}$, (n இரட்டைப் படை எண்ணானால்), $\dfrac{3n+13}{2}$ (ஒற்றைப்படை எண்ணானால்) (ii) இல்லை (iii) 13 உறுப்புக்கள்.

பயிற்சி 8·3

1. (i) 80, 40, 20, 10, 5 (ii) 3, 6, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$

2. (i) $\frac{3}{4}[2^{12}-1]$ (ii) $\dfrac{\sqrt{3}(3^n-1)}{2\cdot 3^{n-1}}$ (iii) $\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3\times 2^{n-2}}$ (iv) $\frac{5}{8}$

(v) $\dfrac{n}{1-x}-\dfrac{x}{1-x}\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}\right)$ (vi) $\frac{27}{5}$

3. (i) $3\frac{413}{990}$ (ii) $\frac{431}{990}$ 4. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$......

5. $\dfrac{3^9}{2^8}$ 7. 108, 36, 12,...... ; $\dfrac{4}{3^{n-4}}$

21. (i) $\frac{40(10^n-1)}{81}-\frac{4n}{9}$ (ii) $\frac{1}{3}\left[n-\frac{(10^n-1)}{9\cdot 10^n}\right]$

பயிற்சி 8·5

1. $\frac{2-(3n-1)x^n}{1-x}+\frac{3(x-x^n)}{(1-x)^2}, \frac{2+x}{(1-x)^2}$

2. $\frac{1-(2n-1)x^n}{1-x}+\frac{2x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}, \frac{1+x}{(1-x)^2}$

4. $\frac{2(x^n-1)}{x^{n-1}(x-1)^2}-\frac{2n-1}{x^n(x-1)}-\frac{1}{x-1}; \frac{x+1}{(x-1)^2}$ $[x>1]$

பயிற்சி 8.6

1. $\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$ 3. (i) $n(n+2)(2n^2+4n-1)$

(ii) $\frac{27n^2(n+1)^2}{4}+\frac{9n(n+1)}{2}-9n(n+1)-8n$

(iii) $2n^2(n+1)^2+6n(n+1)(2n+1)+23n(n+1)+15n$

(iv) $\frac{n(n+1)(3n^2+23n+46)}{12}$ (v) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

(vi) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

(vii) $\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1$

(viii) $\frac{n(4n^2+5n-1)}{2}$ (ix) $\frac{n(n+1)(3n^2+19n+32)}{12}$

(x) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

4. $\frac{3n+5}{3n+1}$ 5. (i) $\frac{n(n+1)(9n^2+35n+28)}{6}$

(ii) $\frac{n(n+1)(9n^2+55n+86)}{6}$ 8. $\frac{4}{3}(4^n-1)+\frac{2n(n^2-1)}{3}$

11. 4951. 12. $\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{3(3n-1)}{2}$

பயிற்சி 9·1

1. (i) 1 (ii) 105 (iii) 1225 (iv) 1

7. ${}_{12}C_5\times{}_9C_3+{}_{12}C_6\times{}_9C_2$ 15. ${}_{55}C_5$; ${}_{55}C_5-{}_{45}C_5$

பயிற்சி 10·1

6. (i) ${}_{15}C_8\times\frac{1}{x}$; $-{}_{15}C_7\,x$ (ii) $16\times{}_8C_4\,x^4$

9. (i) ${}_{20}C_6\times2^6$ (ii) ${}_{20}C_6\times2^{14}$ 12. $a=\frac{2}{3}$; $n=9$

பயிற்சி 10.2

1. $(n+3)2^n$. 2. $(3n+4)2^{n-1}$ 3. $(2n-1)2^n+1$

13. $\frac{(2n)!}{(n+2)!\,(n-2)!}$

கலைச் சொற்கள்

Ad infinitum	முடிவின்றி, அனந்தமாய்
Algebra	அல்ஜிப்ரா
Algebraic Symbol	அல்ஜிப்ரா சங்கேதம்
Alternando	ஒன்று விட்ட விகிதசமம்
Antecedent	முன்னுறுப்பு
Antilogarithm	மடக்கையின் எதிர்மறை அல்லது எதிர்நிலை இலாகரிதம்
Application	பிரயோகம்
Approximately	தோராயமாக, சுமாராக
Base	அடி
Binomial	ஈருறுப்பு
Binomial Theorem	ஈருறுபுபுத் தேற்றம்
,, Coefficient	ஈருறுப்புக் குணகம்
,, expression	ஈருறுப்புக் கோவை
,, theorem	ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Biquadratic	நாற்படி
Case	வகை
Coefficient	குணகம்
,, Detached	பிரித்த குணகம்
,, Literal	எழுத்துக் குணகம்
,, Numerical	எண் குணகம்

,, undetermined	தேராக் குணகம்
Characteristic	மடக்கையின் நேர்க்கூறு ; முழுஎண் பாகம்
Combination	சேர்மானம்
Common difference	பொது வித்தியாசம்
Componendo	கூட்டு விகிதசமம்
Componendo et dividendo	கூட்டுக்கழி விகிதசமம்
Condition	நிபந்தனை
Conjugate	துணை ; பரஸ்பர
Consecutive	அடுத்தடுத்த : இடைவிடாத
Consequent	பின்னுறுப்பு
Constant	மாறா (adj) ; மாறிலி (n)
Continuous	தொடர்ந்த : தொடரும் ; தொடர்
Corollary	கிளைத்தேற்றம்
Cube root	கன மூலம்
Cube (x^3)	x ன் கனம்
Cubic equation	கன சமன்பாடு
Curve	வளைவு : வளைகோடு : வளைவரை
Decimal place	தசமத்தானம்
Decimal Recurring	மடங்கு தசமம்
Definition	வரையறை ; இலக்கணம்
Degree of equation	(சமகரணப்) படி
Denominator	பகுதி
Dependent	சார்ந்த
Difference	வித்தியாசம்
Digit	சிற்றிலக்கம்
Dimension	பரிமாணம்
Direct	நேர்
Directed numbers	திசை எண்கள்
Discriminant	தன்மைகாட்டி ; நிர்ணய ராசி
Distributive law	பங்கீட்டு விதி
Diverge	விரி
Divergence	விரிதல்
Divergent	விரியும்

Divide	வகு
Dividend	வகுபடும் எண்
Dividendo	கழி விகிதச்சமம்
Division	வகுத்தல்
Divisibility	வகுபடுதன்மை
Long Division	நெடுமுறை வகுத்தல்
Synthetic Division	தொகுமுறை வகுத்தல்
Divisor	வகு எண்
Eliminate	நீக்கு
Eliminant	நீக்கற்பலன்
Elimination	நீக்கல்
Equation	சமகரணம் ; சமன்பாடு
Binomial equation	ஈருறுப்புச் சமன்பாடு
Biquadratic equation	நாற்படிச் சமன்பாடு
Conditional equation	நிபந்தனைச் சமன்பாடு
Cubic equation	கன சமன்பாடு
Identical equation	சர்வ சமன்பாடு
Indeterminate equation	தேராச் சமன்பாடு
Member of an equation	சமன்பாட்டு உறுப்பு
Quadratic equation	இருபடிச் சமன்பாடு
Roots of equation	சமன்பாட்டு மூலங்கள்
Side of an equation	(இட, வல)ப் பக்கம்
Simple linear equation	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Simultaneous equation	ஒருங்கமைச் சமன்பாடு
Solution of an equation	சமன்பாட்டுத் தீர்வு
Solve an equation	சமன்பாட்டைத் தீர்
Evaluate	மதிப்பிடு ; மதிப்பைகண்டுபிடி.
Even	இரட்டை
Evolution	மூலக்கணிப்பு
Exponent	அடுக்குக்குறி
Expression	கோவை
Extremes	முனை உறுப்புகள்
Factor	காரணி
Common factor	பொதுக் காரணி

Factorisation	காரணிப்படுத்தல், காரணிகாணல்
Factorial	காரணீயப் பெருக்கம்
Factorise	காரணிப்படுத்து : காரணிகாண்
Significant figure	பொருளுடை இலக்கம்
Standard form	நியமரூபம்
Fourth proportional	விகிதசம நான்காம் உறுப்பு
Partial fraction	பகுதிப்பின்னம்
Fractional	பின்ன
function	சார்பு, சார்பலன்
Explicit function	தெளிவுச் சார்பு
Implicit function	மறைவுச் சார்பு
Linear function	ஒருபடிச் சார்பு
Geometric Progression	பெருக்கல் விருத்தி : பெருக்குத் தொடர்
Graph	வரைப்படம்
Greater than	$a>b$; a, bஐ விட பெரிது
Harmonic	ஹார்மோனிக் : இசை
Homogeneous	ஓரின ; ஒருபடித்தான
Identical	சர்வசம ; முழுதும் ஒத்த
Identity	சர்வசமம் ; முற்றொருமை
Identity Condition	நிபந்தனைச் சர்வசமம்
Inaginary	கற்பனை யான
Incommensurable	பொது அளவற்ற
Inconsistent	முரணான
Indefinite	குறிப்பிடா ; வரையறையில்லா
Independent	சாரா
Indeterminate	தேரா, தேரப்படா
Index (of a power)	அடுக்குக் குறி
Induction	தொகுத்தறி முறை
Inequality	அசமம்
Infinite	முடிவிலா
Infinity	முடிவிலி, அனந்தம்
Integer	முழுஎண்
Integral	முழு : தொகுத்த

Invariable	மாறு : மாறிலி
Involution	அடுக்குக் கணிப்பு
Irrational	விகித முறு
Logarithm	இலாகரிதம் ; மடக்கை
Magnitude	அளவு, பருமன்
Ascending order of magnitude	ஏறு வரிசை
Descending order of magnitude	இறங்கு வரிசை
Maximum	உச்ச, உத்தம
Mantissa	மடக்கையின் பதின்மக்கூறு : இலாகரிதத்தின் தசமப் பாகம் : மடக்கையின் பின்னம்
Mean	இடை
Means	இடை உறுப்புக்கள்
Minimum	நீச, அதம, குறைந்தபட்ச
Monomial	ஓருறுப்பு
Negative quantity	ரிண (ருண) ராசி
Notation	குறியீட்டு முறை
Number	எண்
,, Commensurable	பொது அளவுள்ள
,, Directed	திசை எண்
,, Even	இரட்டை எண்
,, Fractional	பின்ன எண்
,, Imaginary	கற்பனை எண்
,, Incommensurable	பொது அளவற்ற எண்
,, Irrational	விகித முறு எண்
,, Natural	இயற்கை
,, Ordinal	வரிசை எண்
,, Prime	பகா எண்
,, Rational	விகித முறு எண்
,, Real	வாஸ்தவ, நிச எண்
Numerator	தொகுதி எண், தொகுதி
Numerical (value)	எண் (மதிப்பு)
Numerically	எண்ணளவில்
Odd	ஒற்றை : ஒற்றைத் தான

Partial fracion	பகுதிப்பின்னம்
Perfect Square	வர்க்க எண்
Permutation	வரிசை மாற்றம், வரிசை மாற்ற வகைகளில் ஒன்று
Polynomial	பல வுறுப்பு (க் கோவை)
positive	தனராசி
Power	அடுக்கு ; படி
Progression	விருத்தி
Progression Arithmetical	கூட்டு விருத்தி ; கூட்டுத் தொடர்
,, Geometrical	பெருக்கு விருத்தி ; பெருக்குத் தொடர்
,, Harmonic	ஹார்மோனிக் விருத்தி ; பெருக்குத் தொடர்
Proportion	விகிதசமம்
Proportional	விகிதசம
Fourth Proportional	விகிதசம நான்காம் உறுப்பு
,, Mean	தொடர் விகித சம இடை உறுப்பு
,, Third	தொடர் விகித சம மூன்றும் உறுப்பு
Proportion, Continued	தொடர் விகிதசமம்
,, Direct	நேர் விகிதசமம்
,, Extremes of	விகிதசம கடையுறுப்புகள்
,, means	இடையுறுப்புக்கள்
Quadratic	இருபடி
Ratio	விகிதம் ; தகவு
,, Antecedent of	விகித முன்னுறுப்பு
,, Consequent of	விகிதப் பின்னுறுப்பு
,, Direct	நேர்விகிதம்
,, Duplicate	இருபடி விகிதம்
,, triplicate	முப்படி விகிதம்
,, Sub duplicate	கீழிருபடி விகிதம்
,, Sub triplicate	கீழ்முப்படி விகிதம்
,, Greater inequality	பெரிய அசம விகிதம்
,, Less inequality	சிறிய அசம விகிதம்
Rational	விகித முறு
Reciprocal	தலைகீழ்ப் பின்னம் ; விலோமம்
Remainder	மீதி
Remainder Theorem	மீதித் தேற்றம்

Resolve into factors	காரணிகளாகப் பிரித்தல்
Root	மூலம்
„ Imaginary	கற்பனை மூலம்
„ Irrational	விகித முறா மூலம்
„ Rational	விகித முறு மூலம்
„ Real	வாஸ்தவ மூலம், நிச மூலம்
„ Square	வர்க்க மூலம்
Sequence	தொடர்ச்சி, தொடர் முறை
Series	தொடர்
„ Ascending	ஏறுதொடர்
„ Convergent	ஒருங்கு தொடர்
„ Descending	இறங்கு தொடர்
„ Divergent	விரி தொடர்
„ Infinite	முடிவிலாத் தொடர்
Significant	பொருளுடைய
Simplify	சுருக்கு
Simultaneous	ஒருங்கமை ; ஏக கால
Solution	தீர்வு ; விடை
Solve	தீர்
Standard form	நியமரூபம்
Substitute	பிரதியீடு, பிரதியிடுதல்
Suffix	பிற்சேர்க்கைக்குறி
Surd	விகித முறா மூலம்
Symbol	சங்கேதம்
Symmetrical	சமச் சீருள்ள
Absolute Symmetry	முழுச்சீருள்ள
Cyclic symmetry	வட்டச்சீர்
Absolute Term	சார்பிலா உறுப்பு
Trinomial	மூவுறுப்பு
Undetermined	தேரா
Unit	அலகு
Variable	மாறும், மாறி ; மாறு ராசி
Variable dependant	சார்ந்த மாறி
„ Independent	சாரா மாறி
Zero	பூஜ்ஜியம், சுழி

பாகம்—II

திரிகோண கணிதம்

கோணங்கள், தூரங்கள் ஆகியவற்றின் அளவுகளை யாராயும் கணிதத்துறையே திரிகோணம் எனப்படும். Trigonometry என்பது Trigonon, Metron என்னும் இரண்டு கிரேக்க மொழிகளாலாகிய சொற்றொடராம். அது முக்கோணங்களின் அளவுகள் எனப் பொருள்படும். இத் துறையில் முதன்முதல் முக்கோணத்திற்குச் சம்பந்தப்பட்ட கோணங்களையும் பக்கங்களையும் பற்றிய தொடர்புகளே கண்டறியப் பட்டன. வரவர இப்பெயரானது பல முக்கோணங்களாகப் பகுப்புறும் வடிவங்களையும் உட்படுத்திக்கொண்டு, பொதுவாக வடிவங்களுக்குரிய கோணப்பருமன்களைப்பற்றிய ஆய்வுகளையெல்லாம் தழுவிக் கொள்ளுவதாயிற்று. இற்றை நாளில் மேனிலைக் கணிதத்தில் கோணங்களின் சார் பலன்கள் வாயிலாகப் பலவகை இயற்கணித வடிவக்கணித சம்பந்தப் பட்ட ஆராய்ச்சிகள் நடைபெறுகின்றன. இதனால் இவ்விஞ்ஞானத் துறையின் பயன்பாடு நன்கு புலப்படுவதாகும்.

முக்கோணங்கள் சமதளத்திலேனும், கோளத்தளத்திலேனும் வடிவமைந்து விளங்கலாம். ஆகவே இத்துறையும் சமதள திரிகோணம், கோளத்தள திரிகோணமென இருவகைப்படுவதாயிற்று. இங்கு நமது நோக்கம் சமதள திரிகோணத்தைப்பற்றியதேயாகும்.

---

*இவ் விஞ்ஞானத் துறையானது முதன் முதலில் நமது பாரத பூமியிலேயே பிறந்து வளர்க்கப்பட்டதாகும். ஆரியபட்டர் (5-நூற்) வராக மிகிரர் (6-நூற்), பிரமகுப்தர் (7-நூற்), பாஸ்கரர் (12-நூற்) முதலியோரால் நன்குற வளர்க்கப் பட்டபின், அராபியர் மூலமாகக் கைமாறி ஐரோப்பிய நாடுகளுக்குச் சென்றது. அங்கு விளங்கிய கணித மேதைகளின் அயராத உழைப்பின் பயனாகவே 16-ம் நூற்றுண்டுக்குப் பிறகு தற்காலத் திரிகோணம் உருவாகியது. வயிட்டா (vieta 16 நூற்); இயூலர் (Euler 18ம் நூற்) முதலியோர் இவ் விஞ்ஞானத்தின் வளர்ச்சியில் பெரும் பங்கு கொண்டவர்களாகக் கருதப்படுகின்றனர்,

(கோண கணிதம்)

பாகம் II—திரிகோணமிதி (Trigonometry)

I. கோணங்களின் அளவுகளைப் பாகைகளாலும் ஆரையன்களாலும் அறிதல் (Measurement of Angles in Degrees Radians)

1. (i) **அறுபான் முறையளவு** (Sexogesimal measure)

ஆரம்ப வடிவ கணிதத்தில், ஒரு கோணத்தின் மூல அளவு (ஓரலகு) ஒரு நேர்க்கோணமாகும். இது பயிற்சியில் பழக்கமாகக் கையாளுதற்கு ஒரு பெரிய அலகாகும் என்பது வெளிப்படையாம். ஆகவே, ஒரு நேர்க்கோணத்தை 90 சம கலைகளாகவும், ஒவ்வொரு கலையையும் 60 சம விகலைகளாகவும் பகுப்புக்கள் செய்யப்பட்டுள்ளன. x பாகைகளும், (degrees) y கலைகளும், (minutes) z விகலைகளும் (seconds) கொண்டிருப்பதோர் கோணமானது சுருக்கமாக x°, y', z'' என்றெழுதப்படும். இவ்வமைப்பு முறை அறுபான் முறையென வழங்கும். இதனை பிரிட்டிஷ் முறையெனவுங் கூறுவர். இம்முறை எல்லா எண்முறைக் கணக்கீடுகளிலும் அன்றாட செயல் வகைகளிலும் உபயோகிக்கப்பட்டு வருகின்றது.

(ii) நூற்றுமுறை அமைப்பு (Centesimal System) :

பிரெஞ்சுப் புரட்சிக் காலத்தில் எழுந்ததோர் முறையானது தசாம்ச அளவை அடிப்படையில் பொதுவாக அமைக்கப்பட்டு நூற்று முறை

என வழங்குகின்றதாகும். இந்த முறையில் ஒரு கோணத்தின் மூல அலகு ஒரு நேர்க்கோணமாகும். இம்முறையிலமைந்த பகுப்புக்களாவன :

1 நேர்க்கோணம் = 100 கிரேடுகள் (100g)
1 கிரேடு = 100 கலைகள் (100′)
1 கலை = 100 விகலைகள் (100″)

x கிரேடுகளும், y கலைகளும், z விகலைகளும் கொண்டுள்ளதோர் கோணம் சுருக்கமாக $xg\ y'\ z''$ என்றெழுதப்படும். இப்முறை அநுபவ சாத்தியமல்லவென்று கைவிடப்பட்டது. தசாம்ச முறை எளிதேயாயி னும் திரிகோணத் தகவுகளுக்கு ஏற்கெனவே அமைந்துள்ள அட்ட வணைகளையெல்லாம் இம்முறையின்கீழ் கொண்டுவர மறுபடியும் திருப்பிக் கணிக்க வேண்டிய நிலையேற்படுகின்றது. இது பேருழைப்பை மேற்கொள்ள வைப்பதாகும். இவ்வமைப்பு முறையானது அது தோன்றிய பிரஞ்சு நாட்டிலும் வழக்காற்றில் இடம் பெறவில்லை

(iii) **ஆரையன் அல்லது வட்ட அளவு** (Radian or circular measure)

அநுபவ சாத்தியமாக வுள்ளது ஆரையன் (Radian) அளவே யாகும். ஆரையனை மூல அளவாகக்கொண்டு அமைந்துள்ளதால் இம்முறையானது ஆரையன் அல்லது வட்ட அளவு எனப்படும்.

ஆரையன் விவரணம் :

ஒரு வட்டத்தில் ஆரத்திற்கொத்த நீளமுடைய வில்லானது அவ்வட்டத்தின் மையத்தில் எதிர்கொண்டு நிற்கும் கோணம் ஒரு ஆரையனெனப்படும்.

ஒரு ஆரையன் (Radian), $_1C$ என்று குறிக்கப்படும்.

2. ஒரு ஆரையனுனது ஒரு நிலையான கோணமாகும் (The Radian is a constant)

0 என்பது r ஆரங்கொண்ட வட்டத்தின் மையப்புள்ளியெனக் கொள்க.

AB என்னும் வில் (arc) ஆரத்தினளவு நீளமுடையதாய் வட்டத்தின் மையத்தில் AOB என்னும் கோணத்தை எதிர்கொண்டு நிற்பதாகக் கொள்க.

அப்பொழுது $\angle AOB = 1$ ஆரையன் (Radian) ஆகும்.

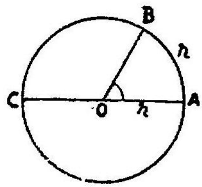
ஒரு ஆரையனது அளவு மாறுததாகும் என்றும் அது குறிப்பிட்ட எந்தவட்டத்தையும் எவ்வகையாலும் சார்ந்ததல்ல என்றும் நிருபித்தல் :

AO ஐ C வரையில் AOC என்பது ஒரு விட்டம் ஆகுமாறு நீட்டுக. அப்பொழுது ABC என்பது ஒரு வட்டப் பாதியாகும்.

நிருபணம் :

AB என்னும் வில்லும், ABC என்னும் அரைவட்டப் பருதியும் தாம் தாம் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிர்கொண்டு நிற்கும் கோணங் களுக்குத் தக விகிதம்பெற்று நிற்கும்.

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{வில் } AB}{\text{வில் } ABC} = \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi}$$



அஃதாவது,

$$\frac{1 \text{ ஆரையன்}}{2 \text{ நேர்க்கோணங்கள்}} = \frac{1}{\pi}$$

$\therefore$ ஒரு ஆரையன்

$$= \frac{2 \text{ நேர்க்கோணங்கள்}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ நேர்க்கோணமாகும்.}$$

இது, வட்டத்தின் ஆரமாகிய r ஐச் சார்ந்து நிற்காமல் தனித்ததோர் மாறிலிப் பருமன் (constant magnitude) உடையதாக விளங்கக் காண் கின்றோம்.

குறிப்பு :

$$1 \text{ ஆரையன்} = \frac{2}{\pi} \text{ நேர்க்கோணம்}$$

$$= (57^\circ 16' 21{\cdot}8'') \text{ (தோராயமாக).}$$

நாம் பின்வரும் தொடர்புகளையும் பெறுகின்றோம்.

2 நேர்க்கோணங்கள் $= \pi$ ஆரையன்கள்.

4 ,, $= 2\pi$,,

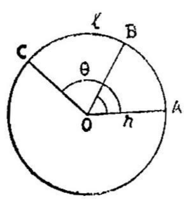
1 ,, $= \frac{\pi}{2}$,,

ஒரு முறையமைப்பிலிருந்து பிறிதொரு முறையமைப்புக்கு மாற்றங்காணப் பின்வரும் தொடர்பு பயன்படுவதாகும்:

π ஆரையன்கள் $=2$ நேர்க்கோணங்கள் $=180^\circ$

3. வில், ஆரம், கோணம் இவற்றிடையேயுள்ள தொடர்புகள்: (Relation between arc, radius and angles)

0 என்பது r ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையப்புள்ளியாகக் கொள்க.



AC என்னும் l நீளமுள்ளதொரு வில்லானது வட்டமையத்தில் θ ஆரையன்கள் அளவுள்ள AOC என்னும் கோணத்தை எதிர்கொண்டு நிற்பதாகுக.

$l=r\theta$ என நிரூபித்தல்.

A யிலிருந்து தொடங்கி r அளவு நீளமொத்த AB என்பதொரு வில்லை அளந்தெடுத்துக் கொள்க. இதனல், விவரணப்படி $\angle AOB=1$ ஆரையனுகும்.

நிருபணம்;

இப்பொழுது, $\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{வில் } AC}{\text{வில் } AB} = \frac{l}{r}$

ஆகவே, $\frac{\angle AOC}{1 \text{ ஆரையன்}} = \frac{l}{r}$

$\therefore \quad \angle AOC = \frac{l}{r}$ ஆரையன்கள்

ஆதாவது, θ ஆரையன்கள் $= \frac{l}{r}$ ஆரையன்கள்

$\therefore \quad \theta = \frac{l}{r}$: அல்லது $l = r\theta$

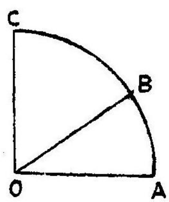
கிளை :

ஒரு வட்டப்பகுதி (Sector) AOC யின் பரப்பு

$= \frac{1}{2} lr = \frac{1}{2} r\theta \cdot r = \frac{r^2\theta}{2}$ ஆம்.

4, வட்டப்பகுதியின் பரப்பு (Area of a sector of a circle)

r அளவு ஆரமுள்ளதொரு வட்டத்தின் மையத்தில் θ கோணத்தை எதிர்கொண்டு நிற்கும் வட்டப்பகுதியின் பரப்பு $\frac{1}{2} r^2\theta$ ஆகும்.



AOB என்பது வட்டப்பகுதியாகுக. OC ஐ OA க்குச் செங்குத்தாக வரைக. AOC என்பது கால்வட்டப்பகுதியாகும்.

$$\therefore \text{ இதன் பரப்பு} = \frac{\text{வட்டத்தின் பரப்பு}}{4} = \frac{1}{4}\pi r^2$$

ஆனால்,

$$\frac{\text{AOB வட்டப்பகுதியின் பரப்பு}}{\text{AOC வட்டப்பகுதியின் பரப்பு}} = \frac{\angle AOB}{\angle AOC}$$

அஃதாவது,

$$\frac{\text{AOB வட்டப்பகுதியின் பரப்பு}}{\frac{1}{4}\pi r^2} = \theta / \frac{\pi}{2}$$

[இங்கு θ வை ஆரன் (Radian) அளவையில் குறிக்கொள்ளப் பட்டமையை அறிக]

$\therefore$ AOB வட்டப்பகுதியின் பரப்பு $= \frac{2\theta}{\pi} \times \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta$ ஆம்.

உதாரணங்கள் :

1. ஒரு ஒழுங்கான தசகோணத் (Decagon) தினுடைய உட்கோணத்தின் அளவை மூவகையான அளத்தல் முறைகளாலும் காண்க :

ஒரு ஒழுங்கான தசகோணத்தின் உட்கோணம் x நேர்க்கோணங்கள் ஆனால்,

$x = \frac{2n-4}{n}$ நேர்க்கோணங்கள் $= \frac{2 \times 10 - 4}{10}$ அல்லது

$\frac{8}{5}$ நேர்க்கோணங்கள்

1 நேர்க்கோணம்

$$= 90^\circ = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$$

$\therefore$ தசகோணத்தின் உட்கோணம் $= 144^\circ = 160^g = \frac{4\pi^c}{5}$

2. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் ஒரு கூட்டு விருத்தியில் அமைந்திருக்கின்றன. மிகக் குறைந்தகோணத்தின் கிரேடுகளின் எண்ணிக்கை மிகப்பெரிய கோணத்தின் ஆரையன் எண்ணிக்கையோடு 40 : π என்ற விகிதத்தில் இருக்குமானால், கோணங்களின் பாகைகளைக் காண்க.

கோணங்கள் $(x-y)^\circ$, x°, $(x+y)^\circ$ எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad x-y+x+x+y = 180$$

$$\therefore \quad 3x = 180$$

$$\therefore \quad x = 60$$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $(60-y)^\circ$, 60°, $(60+y)^\circ$ ஆகும்.

இப்பொழுது, $(60-y)^\circ = \frac{10}{9} \times (60-y)^g$

$$(60+y)^\circ = \frac{\pi}{180} \times (60+y)^c$$

$$\therefore \quad \frac{10}{9}(60-y) : \frac{\pi}{180}(60+y) = 40 : \pi$$

$$\therefore \quad \frac{200}{\pi} \cdot \frac{60-y}{60+y} = \frac{40}{\pi}$$

அஃதாவது $\quad 5(60-y) = 60+y$

$\therefore \quad y = 40$

$\therefore$ கோணங்கள் $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$ ஆகும்.

3. பூமியிலிருந்து 92500000 மைல் தொலைவிலுள்ள சூரியனது விட்டம் அதனை நோக்குங்கால் கண்ணிடத்தில் 32′ எதிர்கொள்ளுமானால், சூரியனது விட்டத்தைக் கணக்கிடுக :

சூரியனது விட்டம் D மைல்கள் எனக்கொள்ளுவோம். சூரியனால் கண்ணிடத்தில் எதிர்கொள்ளும்கோணம் மிகச்சிறியதாகையால், அதன் விட்டத்தைக் கண்ணை மையமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் சிறிய வில் எனத் தோராயமாகக் கொள்ளலாம்.

வில், ஆரம், கோணம் இவற்றிடையே உள்ள தொடர்பின்படி,

$$\frac{l}{r} = \theta \text{ ஆதலால்}$$

$$\frac{D}{92500000} = 32' \text{ உள்ள ஆரையன் அளவு}$$

இப்பொழுது 32′ உள்ள ஆரையன் அளவு

$$= \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{675}$$

$$\therefore \quad D = \frac{185000000}{675}\pi \text{ மைல்கள்}$$

$$= \frac{185000000}{675} \times \frac{22}{7} \text{ மைல்கள் (தோராயமாக)}$$

$$= 862000 \text{ மைல்கள் (தோராயமாக)}$$

பயிற்சி 1

1. ஒரு ஒழுங்கான ஐங்கோணம் (Pentagon), ஒரு ஒழுங்கான எண்கோணம் ஆகியவற்றின் உட்கோணங்களின் அளவை மூவகையான அளத்தல் முறைகளாலும் குறிப்பிடுக.

[விடை : $108°, \frac{3\pi^c}{5}, 120^g$; $135°, \frac{3\pi^c}{4}, 150^g$]

2. 5 அங். ஆரமுள்ளதொரு வட்டத்தின் மையத்தில் 42°ஐ எதிர் கொண்டு நிற்கும் வில் (arc) லின் நீளத்தைக் கண்டறிக.

[விடை : 3·66″]

3. ஒரு தன்னியல் உந்தி (automobile)யானது மணிக்கு 48 மைல் வேகத்தில் செல்லுவதாயின், 30″ விட்டமுள்ள உருளையின் ஆரை (spoke) யானது 10 நிமிடத்தில் எத்தனை ஆரையன் (Radian) திரும்புவதாகும்?

[விடை : $3379 2^c$]

4. பூமியின் ஆரம் 4000 மைல் எனக்கொண்டு ஓரிடத்திற்கு வடக்கில் மற்றோரூர் 440 மைல் தூரத்தில் இருக்குமானால், அவ்விடங்களின் அக்ஷரேகைகளின் வித்தியாசத்தை அறிக.

[விடை : 6·3°]

5. ஒரு மாதாகோவிலின் 100′ உயரமுள்ள ஸ்தூபி (spire) யானது அதை நோக்கும் கண்மணியிடத்து 9′ கோணத்தை எதிர்கொண்டு நிற்குமானால் அதன் தூரத்தைத் தோராயமாகக் கணக்கிடுக.

[விடை : 7·28 மைல்கள்]

6. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி (sector)யின் சுற்றளவானது அதே ஆரமுள்ள மற்றொரு வட்டத்தினுடைய அரை வட்டத்தின் (semi circle) வில்லின் நீளத்திற்குச் சமமாகுமானல், அவ்வட்டகோணப் பகுதியிலுள்ள கோணத்தை மூவகை அளத்தல் முறைகளாலும் குறிப்பிடுக.

[விடை : $65° 27' 16''$; $(\pi - 2)^c$; $72_g\ 72'\ 73''$]

7. ஒரு கடிகாரம் $3\frac{1}{2}$ மணியைக் காட்டும்பொழுது அதன் மணி முள்ளுக்கும் நிமிட முள்ளுக்கும் இடையில் அடங்கியிருக்கும் கோணத்தினளவை மூவகை அளத்தல் முறைகளாலும் குறிப்பிடுக.

[விடை : $75°, \frac{5\pi^c}{12}; 83{\cdot}3^g$]

8. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் ஒரு கூட்டு விருத்தியில் அமைந்திருக்கின்றன. குறைந்த கோணத்தின் ஆரையன் எண்ணிக்கையானது இடைநிலைக் கோணத்தின் பாகையெண்ணிக்கையோடு 1 : 120 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமானல், அக்கோணங்களை ஆரையன் அளவால் குறிப்பிடுக.

[விடை : $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}$]

9. பூமியிலிருந்து 240,000 மைல் தொலைவிலுள்ள சந்திரனது விட்டமானது அதனை நோக்கி நிற்போனது கண்ணிடத்தில் 31'ஐ எதிர் கொண்டு விளங்குமானல், அக்கோணத்தின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுக]

[விடை : 2165 மைல்கள்]

10. 31' கோணவிட்டமுள்ள முழுமதியை முற்றிலும் சரியாக மறைத்து நிற்கும்படியாக 1 அங். விட்டமுள்ள நாணயத்தைக் கண்ணெதிரே எவ்வளவு தூரத்தில் நிறுத்த வேண்டும்? அத் தூரத்தை அங்குலத்தின் தசாம்ஸ சுத்தமாகக் கணக்கிடுக.

[விடை : $110{\cdot}9''$]

11. ஒரு வட்டத்தின் பருதியை (circumference)க் கூட்டுவிருத்தியில் அமையுமாறு நான்காகப் பிரிக்குங் காலத்தில் பெரிய பாகமானது மிகச் சிறிய பாகத்திற்கு நான்கு மடங்காக விளங்குமானல், அவ்வொவ்

வொரு பாகமும் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணங்களை ஆரையன் அளவால் கூறுக.

[விடை: $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$]

12. ஒரு கோணத்தின் பாகைகள் (degrees), கிரேடுகள், ஆரையன்கள் இவற்றின் எண்ணிக்கை முறையே D, G, θ ஆனால்,

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2\theta}{\pi}$$ என நிரூபி.

13. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் $\frac{2}{3}x$ கிரேடுகள்; மற்றொன்று $\frac{3}{2}x$ பாகைகள்; மூன்றாவது $\frac{\pi x}{75}$ ஆரையன்கள். எல்லாக் கோணங்களின் அளவுகளையும் பாகைகளில் தெரிவி.

[விடை: 24°, 60°, 96°]

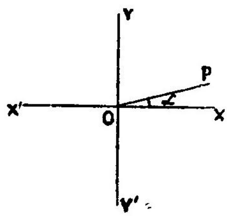
14. ஒரு வட்டப் பகுதி (sector)யின் கோணம் 15°. வட்டத்தின் ஆரம் 4″. வட்டப்பகுதியின் பரப்பைக் கணக்கிடு.

[விடை: 2·095 ச. அங்.]

II. திரிகோண சார்பலன்களும் அவற்றின் தொடர்புகளும்

1. தன, ருணராசிக் கோணங்கள்

OP என்னும் நேர்க்கோடானது OXல் இருந்து தொடங்கி Oவைச் சுற்றிச் சுழன்று வருங்கால் இடப்பக்கமாகச் சுழன்று சென்றால் தனராசிக் கோணங்களையும், வலப்பக்கமாகச் சுழன்று சென்றால் ருண ராசிக் கோணங்களையும் அமைப்பதாகக் கொள்ளப்படும்.

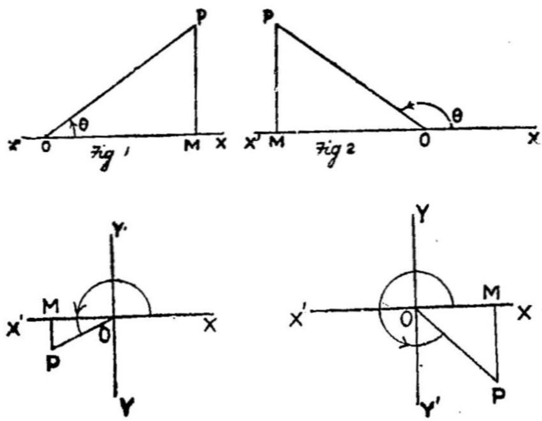


வடிவக் கணிதத்தில் (Geometry) இரண்டு நேர்க் கோணங்களுக்குக் குறைந்தவற்றையே காண்கிறோம். ஆனால், திரிகோண கணிதத்தில் எப்பருமனுள்ள கோணமும் இடம்பெறுவதாகும்.

OP ஆனது OXல் தொடங்கி யெழுந்து XOP என்னும் கோணத்தை ($=\alpha$ என்க) யுண்டாக்கி நின்று, மீண்டும் தொடங்கி இடை நடுவே பக்கம் மாறித் திரும்பாமல் ஒரே நிலையில் முன்னிலைக்கு வந்து எய்தும் அளவும் சுழன்று வருமானால் $\alpha+2\pi$ கோணத்தை யுண்டாக்கும்; இவ்வாறே இன்னொரு முறை சுழன்று வருமானால் $\alpha+4\pi$. கோணத்தையுண்டாக்கும்; இவ்வாறே ஒவ்வொரு முழுச் சுற்றுக்கும் 2π கோணம் அதிகப்படுத்திக்கொள்ள வரும்.

2. எந்த அளவுள்ள கோணத்திற்கும் திரிகோணத் தகவுகள் :

OP என்னுங்கோடு OXல் தொடங்கி யிடப்பக்கமாகச் சுழன்று வரத் தொடங்கி θ என்னும் பருமனுள்ள கோணத்தையுண்டாக்கி நின்றதென்க. OXக்கு PM என்னும் செங்குத்துக் கோட்டினை வரைக. அப்பொழுது θ ஆகிய கோணத்தையொட்டிப் பின்வரும் விவரணங்களைப் பெறுகின்றோம்.



$\frac{MP}{OP}$ என்னும் விகிதம் θன் sin e (நெடுக்கை)யெனப்படும்.

$\frac{OM}{OP}$,, ,, cosin e (கிடக்கை) ,,

$\frac{MP}{OM}$,, ,, tangent (இருக்கை) ,,

$\frac{OP}{MP}$,, ,, cosecant (எதிர் நெடுக்கை) ,,

$\frac{OP}{OM}$,, ,, secant (எதிர் கிடக்கை) ,,

$\frac{OM}{MP}$,, ,, cotangent (எதிரிருக்கை) ,,

மேற்கண்ட விகிதங்கள் சுருக்கமாக sin θ, cos θ, tan θ, cosec θ, sec θ, cot θ என்று வரையப்படும்.

மேற்குறித்த விவரணங்கள் θன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும். வெக்டர் ஆர (radius vector)மானது மற்ற கால் வட்டங்களில் இடம் பெறும்பொழுது தக்க படங்களை மாணக்கர்கள் வரைந்து கொள்ள வேண்டும். கோடுகளும், கோணங்களுங் குறித்து அமைத்துக் கொள்ள வேண்டிய இராசிக்குறி விதிகளையும் தழுவிக்கொள்ள வேண்டும். மேற்கண்ட விகிதங்களனைத்தும் நீளத்தை நீளத்தால் வகுத்துப்பெற்றவையாதலின், அவை எண்கள் மட்டுமேயாம்.

குறிப்பு 1: θ ஒரு குறுங்கோணமானல் பின்வரும் விவரணங்கள் மெய்ம்மையானவையாகத் தோன்றும்.

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP} = \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\text{cosine}\ \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{அயல்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அயல்பக்கம்}}$$

குறிப்பு 2: குறிப்பு (1)ல் உள்ள விவரணங்கள் θ விரிகோணமாகியபொழுது பொருந்தாவாம்.

குறிப்பு 3: சுழல் கோட்டின்மேல் P என்னும் புள்ளியை எவ்விடத்தில் எடுத்துக்கொண்டாலும் கொடுக்கப்பட்ட θ என்னும் யாதொரு கோணத்திற்குரிய தகவுகள் அனைத்தும் முன்பெற்றவாறே மாறுபடாமல் அமைந்திருக்கும்.

3. திரிகோணச் சார்பலன்களுள் ஒன்றற்கொன்று அமைந்துள்ள தொடர்புகள் (Relation of Trigonometric ratios to one another) **விவரணங்களால்.**

(i) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$: (ii) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$:

(iii) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ ஆம்.

(iv) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ என்று நிரூபி.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{MP}{OP} \div \frac{OM}{OP} = \frac{MP}{OM} = \tan\theta$$

(v) மேலும், $\cot \theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

குறிப்பு $(\sin\theta)^2$ என்பது $\sin^2\theta$) என்றெழுதப்படும்.

(vi) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ (θன் எல்லாமதிப்புக்களுக்குமாம்) என்று நிரூபி

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$=\frac{MP^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=\frac{MP^2+OM^2}{OP^2}=\frac{OP^2}{OP^2}=1$$

(பிதாகொரஸ் தேற்றம்)

(vii) θ ன் எல்லாமதிப்புக்களுக்கும் $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ என்று நிரூபி.

$$1+\tan^2\theta=1+(\tan\theta)^2=1+\left(\frac{MP}{OM}\right)^2$$

$$=1+\frac{MP^2}{OM^2}=\frac{OM^2+MP^2}{OM^2}=\frac{OP^2}{OM^2}$$

(பிதாகொரஸ் தேற்றப்படி)

$$=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2=(\sec\theta)^2=\sec^2\theta.$$

(viii) θ எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ என்று நிரூபி.

$$1+\cot^2\theta=1+(\cot\theta)^2=1+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=1+\frac{OM^2}{MP^2}$$

$$=\frac{MP^2+OM^2}{MP^2}=\frac{OP^2}{MP^2}$$ (பிதாகொரஸ் தேற்றப்படி)

$$=\operatorname{cosec}^2\theta$$

4. θ ஆனது 0° யிலிருந்து 360° வரையில் மதிப்பு வேறுபட்டு வருங்காலத்தில், அதன் கோணத் தகவுகளுக்குரிய இராசிக் குறிகளில் காணப்படும் மாறுபாடுகளைத் தொடர்ந்தறிதல் :

(i) நமது விவரணப்படி $\sin\theta=\frac{MP}{OP}$ ஆகும். OP ஆனது

எப்பொழுதுமே தனராசியாகக் கருதப்படுதலால், MP யின் இராசிக் குறியையே கொள்ளுதற்பாலதாகும்.

θ ஆனது, 0° க்கும் 180° க்கும் இடையே படுங்கால் தனராசியாகவும், 180° க்கும் 360° க்கும் இடையே படுங்கால் ருணராசியாகவும் $\sin\theta$ விளங்கும்.

ஆகவே, $\sin\theta$ ன் தகவுகள் முதலிரண்டு கால்வட்டங்களில் தனராசியாகவும், மூன்றாவது நான்காவது கால்வட்டங்களில் ருணராசியாகவும் இருக்கும்.

(ii) $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$ ஆதலின், OM க்கு உரிய இராசிக்குறியையே பெறும்.

θ ஆனது 0° க்கும் 90° க்கும் இடையேனும், 270 க்கும் 360 க்கும் இடையேனும் உள்ளபொழுது தனராசியாகவும், 90° க்கும் 270° க்கும் இடையேயுள்ளபொழுது ருணராசியாகவும் இருக்கும்.

ஆதலால், $\cos\theta$ ஆனது முதலாவது நான்காவது கால்வட்டங்களில் தனராசியாகவும், இரண்டாவது மூன்றாவது கால்வட்டங்களில் ருணராசியாகவும் விளங்கும்,

(iii) $\tan\theta = \dfrac{MP}{OM}$ ஆதலின், MP ம் OM ம் ஒரே குறியைப் பெறும் பொழுது தனராசியாகவும், அவை மாறுபட்ட குறியைப் பெறும் பொழுது ருணராசியாகவும் இருக்கும்.

ஆகவே, θ ஆனது 0°க்கும் 90° க்கும் இடையிலோ அல்லது 180° க்கும் 270° க்கும் இடையிலோ உள்ளபொழுது தனராசியாகவும், 90° க்கும் 180° க்கும் இடையிலோ 270° க்கும் 360° க்கும் இடையிலோ உள்ளபொழுது ருணராசியாகவும் $\tan\theta$ விளங்கும். அதாவது, முதலாவது மூன்றாவது கால்வட்டங்களில் தனராசியாகவும், இரண்டாவது நான்காவது கால்வட்டங்களில் ருணராசியாகவும் இருக்கும் என்பதாம்.

இப்பொழுது $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\text{sine}\,\theta}$ ஆதலின், sine θ க்குரிய குறிகளையே பெறும். இங்ஙனமே $\sec\theta$ ஆனது cosine θ வின் குறிகளையும், $\cot\theta$ ஆனது $\tan\theta$ வின் குறிகளையும் கொள்ளுமாறறியப்படும்.

குறிப்பு : மேல் மொழிந்தவற்றால் முதல் கால் வட்டத்தில் எல்லாத் தகவுகளும் + ஆமென்றும், இரண்டாம் கால்வட்டத்தில் sine மட்டும் + ஆமென்றும், மூன்றுங்கால் வட்டத்தில் tan மட்டும் + ஆமென்றும், நான்காம் கால் வட்டத்தில் cosine மட்டும் + ஆமென்றும் அறிந்துகொள்ளநிற்கும்,

Sine மட்டும் + IIம் கால்வட்டம்	எல்லாத்தகவுகளும் + Iம் கால்வட்டம்
IIIம்கால்வட்டம் tan மட்டும் +	IV ம் கால்வட்டம் cosine மட்டும் +

5. 0°, 45°, 60°, 30°, 90°, 180°, 270°, 360° என்பவற்றின் கோணத்தகவுகளின் மதிப்பைக் கண்டறிதல் :

(i) **கோணம் 0°** : கோணம் 0° ஆகும்பொழுது P யும் M மும் ஒன்றுபடுகின்றன.

(பிரிவு 2 : படம் 1 ல் காண்க)

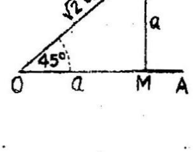
ஆகவே $MP=0$; $OM=OP$

$$\therefore \quad \sin 0° = \frac{MP}{OP} = \frac{O}{OP} = 0.$$

$$\cos 0° = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

$$\tan 0° = \frac{MP}{OM} = \frac{O}{OM} = 0.$$

(ii) **கோணம் 45°**



பிரிவு 2. படம் 1ல், $\theta = 45°$ ஆனால், $OM=MP=a$

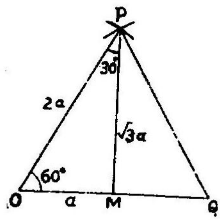
அப்பொழுது, $OP^2 = OM^2 + MP^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $OP = \sqrt{2}a$,

$$\therefore \quad \sin 45° = \frac{MP}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{MP}{OM} = \frac{a}{a} = 1.$$

(iii) **கோணம் 60°**



OQP என்பது $2a$ அலகுள்ள பக்கங்களைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் ஆகுக. Pயிலிருந்து OQக்கு PM என்னும் செங்குத்துக் கோட்டினை வரைக.

அப்பொழுது PM ஆனது OPQ என்னும் கோணத்தையும், OQ என்னும் பக்கத்தையும் சமமாக வெட்டும்.

$\therefore \quad \angle OPM = 30°$: $OM = a$ அலகுகள்.

OPM என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்திலிருந்து $OP = 2a$ ம்; $OM = a$ ம் ஆதலால், $MP^2 = OP^2 - OM^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ ஆகும்.
$\therefore \quad MP = \sqrt{3}a.$

ஆகவே, $\sin 60° = \frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 60° = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{MP}{OM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

(iv) **கோணம் 30°**

மேலே கொடுத்த படத்தில் $\angle OPM = 30°$ ஆதலைக் கருதிக் கொண்டால்,

$\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆம்

(v) **கோணம் 90°**

கோணம் XOP, 90° ஆகும்பொழுது MP ஆனது OP ஓடு இணைகின்றதாகும். ஆகவே, OP = MP ; OM = 0 ஆம்.

$$\therefore \quad \sin 90° = \frac{MP}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{O}$$

எண்முறை கணிதத்தில் பூஜ்ஜியத்தால் வகுத்தல் அநுமதிக்கப்படாது. ஆகவே, tan 90° ஆனது விவரணத்திற்கு ஏலாத தாகும்.

எனினும், கோணமானது 90°ஐ நோக்கிச் செல்லும்பொழுது, M என்ற புள்ளி O ஐ அணுகும். ஆகவே, $\tan \theta = \frac{MP}{OM}$ என்பதில் $\theta \to 90°$ ஆகும்பொழுது, பகுதி OM → O ஆகும்.

$\theta \to 90°$ நிலையில் $\tan \theta$ ஆனது $\frac{MP}{x}$ என்னும் வடிவைக் கொள்ளும், இங்கு $x \to 0$ ஆம்.

இப்பொழுது, $x \to 0$ ஆகுங்கால் $\frac{1}{x}$ ஆனது அளவுகடந்து பெருகுவதாகும். இதனை $\theta \to 90$ ஆகுங்கால் $\tan \theta \to \infty$ என்று கூறுகிறோம். (∞ என்பது அநந்த மதிப்புநிலையைக் காட்டும் எண் குறிப்பாகும்.)

எனினும், θ ஆனது 90°க்குச் சிறிது அதிகப்பட்டு, இரண்டாம் கால் வட்டத்திலிருந்து 90°ஐ நோக்கிச் செல்லுகையில், tangent ருணராசியாகும். ஆகவே, இரண்டாம் கால் வட்டத்திலிருந்து $\theta \to 90°$ ஆகுங்கால் $\tan \to \infty$ ஆகும். (அம்புக்குறியை "............ஐ நோக்கிச் செல்லுதல்" என்று சொல்லிக் கொள்ளுக.)

ஆகவே θ, ஆனது 90° வழியாக அதிகரிக்கும்பொழுது $\tan\theta$ ஆனது $+\infty$ யிலிருந்து $-\infty$க்குப் பாய்வதாகும்.

(iv) கோணம் 180°

$\theta=180^\circ$ ஆகும்பொழுது P மும் M யும் ஒன்றுபடும்.

$\therefore$ MP$=0$; OP$=$OM (எண்ணளவில்). ஆனால் OM ருண ராசியாகும். ஆரவெக்டாரின் (Radius Vector) ராசிக்குறி யெப்பொழுதுமே தனராசியாகக் கருதப்படும்.



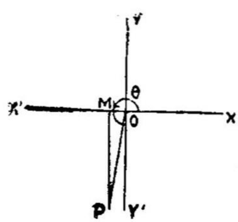
$$\sin 180^\circ=\frac{MP}{OP}=\frac{O}{OP}=0$$

$$\cos 180^\circ=\frac{OM}{OP}=-\frac{OP}{OP}=-1$$

$$\tan 180^\circ=\frac{MP}{OM}=\frac{O}{OM}=0$$

(vii) கோணம் 270°

$\theta=270^\circ$ ஆம்பொழுது, Oவும் Mமும் ஒன்று சேரும். MP ஆனது OPயுடன் இணையும். $\therefore$ OM$=0$; MP$=$OP (எண்ணளவில்) ஆனால் MP ருணராசியாகும். ஆரவெக்டர் (radius vector) எப்பொழுதும் தனராசியாம்.



$$\therefore\ \sin 270^\circ=\frac{MP}{OP}=-\frac{OP}{OP}=-1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{O}{OP} = 0$$

$$\tan 270^\circ = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{O}, \text{ (விவரணம் எய்தாதது.)}$$

ஆனல், $\theta \rightarrow 270^\circ$ ஆக, $OM \rightarrow 0$; $\tan\theta \rightarrow \infty$ ஆகும்.

எனினும், θ ஆனது 270°க்குச் சிறிது அதிகப்படும்பொழுதும் நான்காவது கால் வட்டத்திலிருந்து 270° நோக்கிச் செல்லுகையிலும், tangent ருணராசியாகி, $-\infty$ ஐ நோக்கிப் பெயருவதாகும். ($\tan\theta \rightarrow -\infty$)

(viii) **கோணம் 360° அல்லது 2π ஆரையன்கள்:**

ஆரவெக்டரானது (radius vector) OXலிருந்து தொடங்கி யொருமுழுச் சுற்றை முடித்தால். அது 360° ஏற்படுத்தியபின் OX என்னும் ஆரம்பக் கோட்டுடனேயே கலந்து நிற்கும். அதனல், O° கோணமும் 360° கோணமும் ஒரே எல்லைக் கோட்டினைக் கொள்ளு வனவாகும். ஆகவே, 360°ன் கோணத்தகவுகளெல்லாம் O°ன் தகவுகளுக்கு இசைந்தே யிருக்கும்.

குறிப்பு: n ஆனது தனராசி யல்லது ருணராசி முழு எண்ணுகும் பொழுது α கோணமும், $\alpha + 2n\pi$ கோணமும் ஒரே யிறுதிநிலையுடைய ஆரவெக்டரைக் கொள்ளுகின்றன. ஆதலால், ஒத்த கோணத் தகவுகளையே கொள்ளுவனவாகும்.

இனி, இதுகாறும் கண்டறிந்த பலன்களைப் பின்வரும் அட்டவணை யில் தொகுத்துக் காணலாகும் :

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

6. கோணத்தகவுகளின் மதிப்புக்களுக்கு எல்லை வரம்புகள் :

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP}; \quad \cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

எந்த நேர்க்கோண முக்கோணத்திலும் கர்ணத்தைவிட மற்ற இரண்டு பக்கங்களில் யாதொன்றும் பெரியதாகாது. ஆகவே, $\sin\theta$ன் எண்மதிப்பு 1க்கு மிகாததாகும். இவ்வாறே, $\cos\theta$ன் மதிப்பும் 1க்கு மிகாததாகும்.

$\operatorname{cosec}\theta$ ஆனது $\frac{1}{\sin\theta}$ ஆதலால், அதன் மதிப்பு எண்ணளவில் 1க்கு குறையாததாகும். இவ்வாறே, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ஆதலின், அதன் மதிப்பு எண்ணளவில் 1க்குக் குறையாதாகும். எனினும், $\tan\theta$, $\cot\theta$ க்களின் மதிப்புக்களுக்குக் கட்டில்லையாகும். அவை, $-\infty$க்கும் $+\infty$க்கும் இடையே எந்த மதிப்பையேனும் பெற்று நிற்கலாம்.

மாதிரிவினுக்கள் :

A ஒரு விரிகோணமும், $\sin A = \frac{20}{29}$ மும் ஆனுல் $\cos A$, $\tan A$ மதிப்புக்களைக் கண்டறிக.

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{49 \times 9}{29^2}$$

$$\therefore \quad \cos A = \pm \frac{21}{29}$$

A விரிகோணமாதலால், $\cos A$ ம், $\tan A$ ம் ருணராசிகளாகும்.

$$\therefore \quad \cos A = -\frac{21}{29}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{20}{29} \div \left(\frac{-21}{29}\right) = -\frac{20}{21}$$

2. மதிப்பைக் காண்க :

$$2\sec^2 180^\circ \cos 0^\circ + 3\sin^2 270^\circ - \operatorname{cosec} 90^\circ$$

விடை : $\cos 180^\circ = -1 \quad \therefore \sec 180^\circ = -1; \ \sec^2 180 = +1$

மேலும், $\cos 0^\circ = 1$ ஆகும்.

இனி, $\sin 270^\circ = -1 \quad \therefore \quad \sin^3 270 = (-1)^3 = -1$

$\sin 90^\circ = 1 \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1$

இந்த மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டால், கொடுத்த கோவையின் மதிப்பு $2(1)(1)+3(-1)-1$

$= 2-3-1 = -2$ ஆகும்

3. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$ என நிரூபி.

விடை :

$$\text{இடப்பக்கம்} = \frac{\cos A}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \cos A + \sin A$$

= வலப்பக்கப் பகுதி

பயிற்சி 2

1. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க :—

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1.$

(ii) $(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

(iii) $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B = 1$

(iv) $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2 = 2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$

(v) $(1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta) = 1$

(vi) $\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}+\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=0$

(vii) $\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$

(viii) $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos^2 A-\sin^2 A$

(ix) $\sec^4 A-\sec^2 A=\tan^4 A+\tan^2 A$

(x) $\cot^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A$

(xi) $\frac{1}{\sec A+\tan A}=\sec A-\tan A$

(xii) $\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A$

(xiii) $\sqrt{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A$

(xiv) $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)=1$

(xv) $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\operatorname{cosec} A-\cot A$

(xiv) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

(xvii) $\frac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}=1-2\sec A\tan A+2\tan^2 A$

(xviii) $\operatorname{cosec}^6 A-\cot^6 A=3\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A+1$

(xix) $\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A-1}+\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A+1}=2\sec^2 A$

(xx) $\frac{\cos^3 A+\sin^3 A}{\cos A+\sin A}+\frac{\cos^3 A-\sin^3 A}{\cos A-\sin A}=2$

(xxi) $\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}=1+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

(xxii) $\frac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} + \frac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} = 2\sec\theta$

(xxiii) $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$

(xxiv) $\frac{1}{1+\tan\theta} + \frac{1}{1+\cot\theta} - \frac{1}{1+\cot^2\theta} + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$

(xxv) $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

2. (i) $\tan A = -\frac{15}{8}$ ஆனல், A எந்த வட்டப்பகுதியில் நிற்கும்? sin A, cos A என்பவற்றைக் கண்டறிக.

(ii) $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ ஆனல், எவ்வட்டப் பகுதியில் θ அமையும், $\sin\theta$, $\tan\theta$ என்பவற்றைக் கண்டறிக.

3. (i) $\tan\alpha = \frac{4}{15}$ ம், $180° < \alpha < 270°$ம் ஆனல், $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

(ii) A ஒரு குறுங்கோணமும், $\sec A = \frac{13}{5}$ ம் ஆனல், $\frac{2\sin A + 3\cos A}{4\sin A - 9\cos A}$ ன் மதிப்பைக் காண்க:

[விடை : 13]

(iii) $\sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ எனின், $\sec\theta - \tan\theta$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

[விடை : $\frac{a-b}{a+b}$]

(iv) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$ எனில், $\frac{\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}$ ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{3}{4}$]

(v) $\cot\theta = \frac{a}{b}$ எனில், $\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta}$ ன் மதிப்பைக்காண்க.

[விடை : $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$]

(vi) $\cos A = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ஆனால், $\sec A - \tan A$ ன் மதிப்பென்ன?

[விடை : $\dfrac{a-b}{a+b}$]

4. மதிப்புக்களைக் காண்க :—

(i) $\operatorname{cosec}^2 \dfrac{\pi}{4} \cdot \sec^2 \dfrac{\pi}{6} \sin^3 \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi}{8}$

[விடை : $\frac{4}{3}$]

(ii) $\cot^2 30° - 4 \cos^2 45° + 3 \sec^2 60°$

[விடை : 13]

(iii) $2 \sec^2 180° \cos 0° + 3 \sin^3 270° - \operatorname{cosec} 90°$

[விடை : -2]

(iv) $\tan 180° \cos 270° + \sec 360° - \operatorname{cosec} 270°$

[விடை : 2]

(v) $(\sin 60° + \sin 30°)^2 + (\cos 60° - \cos 30°)^2$

[விடை : 2]

(vi) $\left(\sin \dfrac{\pi}{6} + \cos \dfrac{\pi}{6}\right)\left(\sin \dfrac{\pi}{3} - \cos \dfrac{\pi}{3}\right) \sec \dfrac{\pi}{3}$

[விடை : 1]

5. எல்லாக்கோணத் தகவுகளையும் (Trigonometric Ratios)

(i) sine (ii) cosine (iii) tangent (iv) cosecant (v) secant (vi) cotangent என்றவற்றுள் ஒவ்வொன்றனோடும் சார்த்தி எழுதுக.

6, (i) sine θ வை ஏனைய தகவுகளின் சார்பாகக் கூறுக

(ii) cosine θ ,, ,, ,,

(iii) tan θ ,, ,, ,,

(iv) cosecant θ ,, ,, ,,

(v) secant θ ,, ,, ,,

(vi) cotangent θ ,, ,, ,,

7. $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = 4$ ஆனால், $\cos\theta$ எவ்வளவு ?

[விடை : $\frac{15}{17}$ அல்லது -1

(ii) $2\sin\theta + \cos\theta = 2$ ஆனால், $\sin\theta$ எவ்வளவு ?

[விடை : 1 அல்லது $\frac{3}{5}$]

(iii) $\sec\theta - \tan\theta = a$ ஆனால், $\text{sine}\ \theta = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ என்று காட்டுக.

(iv) $\sec A + \tan A = a$ ஆனால், $\sin A = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ என்று காட்டுக.

8. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ ஆனால், $a\sin\theta + b\cos\theta = +-\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ என்று நிரூபி.

9. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, $b\cos\theta - a\sin\theta = d$ ஆனால், $a^2+b^2 = c^2+d^2$ என்று காட்டுக.

10. $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ ஆனால், $\tan\theta$ வின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1\right]$$

III. கோணகணித அட்டவணைகள்—உயரங்களும் தொலைகளும் பற்றிய எளிய கணிதங்கள்

(Use of Trigonometric Tables-Easy Problems on Heights and Distances)

0°க்கும் 90°க்கும் இடைப்பட்ட எல்லாக் கோணங்களின் கணிதத் தகவுகளும் (ratios) கவனமாகக் கணிக்கப்பட்டு, அச்சிட்ட அட்டவணைகளாகக் கிடைத்துள்ளன. நெடுக்கைகள் (sines), கிடக்கைகள் (cosines) முதலாகிய தகவுகளின் மதிப்புக்கள் 6 கலைகள் வித்தியாசத்திற்கு நான்கெண் அட்டவணைகளாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் 1, 2, 3, 4, 5 கலைகள் வித்தியாசத்துக்கான சிறு மதிப்புக்களும் தனித் தனிப் பத்திகளில் தரப்பட்டுள்ளன. கோணத்தினளவு 0°யிலிருந்து 90°க்கு அதிகரிக்கையில், நெடுக்கைகள் (sines), இருக்கைகள் (tangents), எதிர் கிடக்கைகள் (secants) ஆகிய தகவுகளும் அதிகரித்துச் செல்லுமாதலால், அவற்றிற்கு வித்தியாசப் பத்திகளில் (difference columns) கண்ட எண்ணை அட்டவணையினையின் அகத்தில் கொடுத்துள்ள மதிப்புக்களோடு கூட்டிக்கொள்ள வேண்டும். கிடக்கைகள் (cosines), எதிர்நெடுக்கைகள் (cosecants), எதிரிருக்கைகள் (cotangents) ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் கோணம் ஏறத் தாம் குறைவுறுதலால் அவற்றிற்கு அட்டவணையின் அகத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களிலிருந்து வித்தியாசப் பத்திகளில் காணும் எண்களைக் கழித்துக்கொள்ளவேண்டும். இந்த அட்டவணைகள் இயற்கை நெடுக்கைகள் (Natural sines)

இயற்கைக் கிடக்கைகள் (Natural cosines), இயற்கையிருக்கைகள் (Natural tangents) என்பவற்றின் அட்டவணைகளெனப்படும். இவற்றின் உபயோகத்தை மாணவர்கள் நன்கு பழகி யறியவேண்டும்.

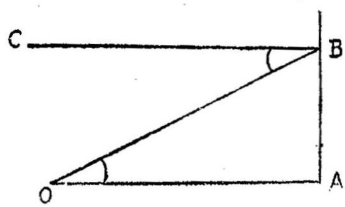
பயிற்சி 3·1

1. அட்டவணைகளிலிருந்து (1) sin 23° 42′ (2) cos 69° 22′ (3) tan 49° 16′ (4) cos 12° 9′ (5) tan 25° 29′ (6) sin 64° 17′ ஆகியவற்றின் தகவுகளை யறிக.

2. அட்டவணைகளின் துணைகொண்டு பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கோணத்தின் கலைக்குச் சுத்தமாகத் தீர்வு காண்க:

(7) $\cos x = \cdot 3530$ (8) $\tan A = 1\cdot 634$ (9) $\sin x = \cdot 7218$ (10) $\cos A = \cdot 8546$ (11) $\sin A = \cdot 2890$ (12) $\tan x = \cdot 3038$

2. உயரங்கள், தொலைகள் பற்றிய எளிய கணிதங்கள்.



படத்தில் O என்பது நோக்குகின்றவனது கண்ணாகவும், AB என்பதொரு கோபுரமாகவும் கொள்ளுவோம். அப்பொழுது ∠AOB ஆனது Oயிலிருந்து காணுங் காலத்தில் கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணமெனப்படும். BC ஐ AOக்குச் சமாந்தரமாக (parallel) இழு. அப்பொழுது ∠CBO ஆனது கோபுரத்தின் உச்சியாகிய Bயிலிருந்து காணுங்காலத்தில் ‘O’ன் இறக்கக் கோணமெனப்படும்.

பல்கலைக் கழக மாதிரிக் கணக்குகள்

1. ஒரு குன்றை யெதிர்நோக்கிச் சென்று கொண்டிருந்தவன் அதன் உச்சியை 11° 35′ ஏற்றக் கோணத்தில் கண்டான். அதை நோக்கி மேலும் 820 கெஜங்கள் நெருங்கிச் சென்றதும் அவ்வேற்றக் கோணம் 65° 15′ ஆகக் கண்டான் என்றால், அக்குன்றத்தின் உயரத்தைக் கண்டறிக.

விடை: படத்தில் காட்டியபடி A ஆனது முதலில் நின்று கண்ணுற்ற இடமாகவும், B ஆனது A ஐ விடக் கோபுரத்திற்கு அணித்தாகி யிரண்டாவதாக நின்று கவனித்த இடமாகவும், C என்பது கோபுரத்தின் உச்சியாகவும் கருதிக்கொள்ளுவோம். கோபுரத்தின் உயரம் (CP=) h அடி என்பதானால்,

$$\tan \angle PAC = \frac{CP}{AP}$$

அஃதாவது, $\tan 11^\circ 35^\circ = \frac{h}{AP} \quad \therefore \quad AP = h \cot 11^\circ 35'$

$$\tan \angle PBC = \frac{CP}{BP}$$

அஃதாவது, $\tan \angle 65^\circ 15' = \frac{h}{BP} \quad \therefore \quad BP = h \cot 65^\circ 15'$

ஆனால், $AP - BP = AB$ ஆம்.

ஆகவே, $h \cot 11^\circ 35' - h \cot 65^\circ 15' = 820 \times 3 = 2460$

$$\therefore \quad h = \frac{2460}{\cot 11^\circ 35' - \cot 65^\circ 15'}$$

$$= \frac{2460}{4{\cdot}8716 - 0{\cdot}4610} = \frac{2460}{4{\cdot}4105}$$

$$\log h = \log 2460 - \log 4{\cdot}4106 \quad = 3{\cdot}3909 - 0{\cdot}6444 = 2{\cdot}7465$$

$\therefore \qquad h =$ எதிர் $\log 2{\cdot}7465 = 557{\cdot}8$

$\therefore \qquad$ குன்றத்தின் உயரம் $= 557{\cdot}8$ அடியாகும்.

2. 200′ உயரமுள்ளதொரு குன்றத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியையும் அடியையும் நோக்கியபொழுது அவை முறையே 30°, 60° இறக்கக் கோணங்களில் காணப்பட்டனவென்றால், அக்கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டறிக.

AB குன்றையும், PQ கோபுரத்தையும் காட்டுவதாகக் கொள்ளுவோம். மேலும் $PQ = h$ எனக் கொள்ளுவோம். QL ஐ AB க்குச் செங்குத்தாக வரைக.

இனி, APB என்னும் முக்கோணத்தில், $\angle APB = 60^\circ$,

$\therefore \quad \tan 60^\circ = \frac{200}{AP}$ அல்லது $AP = 200 \cot 60^\circ = \frac{200}{\sqrt{3}}$.

(ii) BLQ என்னும் முக்கோணத்தில், $BL = 200 - h$; $\angle PQL = 30^\circ$

$\therefore \quad \tan 30^\circ = \frac{200-h}{LQ}$ அல்லது $LQ = (200-h) \cot 30 = (200-h)\sqrt{3}$. இந்நிலையில் AP யும் LQ யும் சமமாதலின் $\frac{200}{\sqrt{3}} = (200-h)\sqrt{3}$ ஆம். அதாவது, $200 = (200-h)3$ அல்லது $3h = 400$ ஆம்.

$$\therefore \quad h = \frac{400}{3} = 133 \cdot 33$$

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம் $= 133' \cdot 33$

3. ஒருவன் ஓர் ஏரிக்கரையில் நீர் மட்டத்திற்கு 400 அடி உயரத்தில் நின்றுகொண்டு ஒரு மேகத்தை 30° ஏற்றக்கோணத்திலும், ஏரியின் நீரில் தோன்றிய அதன் பிரதிபிம்பத்தை 45° இறக்கக்கோணத்திலும் கண்டானென்றால், ஏரிக்கு மேலே மேகமிருந்த உயரத்தைக் கண்டறிக.

A என்பது ஏரியின் நீர் மட்டத்திற்கு $400'$ உயரத்திலுள்ளதோர் இடமாகும். B என்பது மேகமிலை, E என்பது அதன் பிம்பமுமாகும்:

BE என்னும் செங்குத்துக்கோடு நீர்மட்டத்தை D என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. BE க்குச் செங்குத்தாக AC ஐ வரைக; $CB = x'$ எனக் கொள்க. அப்பொழுது B மேகம் E அதன் பிம்பமுமாகலின் $BD = DE$ ஆம்.

இனி, $\quad DB = DC + CB = 400 + x$

$\therefore \quad ED = DB = 400 + x$

அன்றியும், $EC = ED + DC = 400 + x + 400 = 800 + x$

மேலும், ACE என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்தில்,

$\angle EAC = 45^\circ - \angle CEA$; $\quad \therefore \quad AC = EC = 800 + x$

ACB என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்தில், $\angle CAB = 30^\circ$, $CB = x$; $AC = 800 + x$ ஆகும்.

$\therefore \quad \tan 30^\circ = \dfrac{CB}{AC}$; அஃதாவது, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{x}{800 + x}$

$\therefore \quad 800 + x = \sqrt{3}x$ அல்லது $x(\sqrt{3} - 1) = 800$

$$\therefore \quad x = \frac{800}{\sqrt{3}-1} = \frac{800(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 400(1 \cdot 7321 + 1)$$

$$= 400 \times 2 \cdot 7321 = 1092 \cdot 84$$

$\therefore$ நீர் மட்டத்திற்குமேல் மேகத்தின் உயரமானது

$400 + x = 400 + 1092 \cdot 84$ அடி

$= \mathbf{1492 \cdot 84}$ **அடி.**

பயிற்சி 3·2

1. முந்நூறு அடி தூரத்திலிருந்து நோக்கும்போது ஒரு கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° ஆகுமானால், அக்கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டறிக.

[விடை: 519·6′]

2. ஒருவன் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலிருந்து ஒரு கோபுர உச்சியின் 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறான். அதை நோக்கி அதே நேர்க்கோட்டில் 100 அடி நடந்து போனபின் அவ்வேற்றக் கோணம் இரு மடங்காயிருக்கக் காண்கின்றான் என்றால், அக்கோபுரத்தின் உயரத்தையும், அவன் முன்னே அக் கோபுரத்தின் அடிப்பாகத்திலிருந்து விலகியிருந்த தூரத்தையும் கண்டறிக.

[விடை: $50\sqrt{3}$, 150]

3. ஒருவன் ஒரு ஆற்றங்கரையில் நின்று எதிர்க்கரையில் இருந்த தொரு மரத்தின் உச்சியை 60° ஏற்றக் கோணத்தில் நோக்குகிறான்; அதன் கரையிலிருந்து 50 அடி நேராகப் பின்னேக்கிச் சென்ற

பின் அவ்வேற்றக் கோணம் 30° ஆகக் காண்கின்றான். இவற்றால் ஆற்றின் அகலத்தையும் மரத்தின் உயரத்தையும் கண்டறிக.

[விடை : 25 √ 3,25]

4. இரண்டு பார்வையாளர்கள் நிற்கும் A, B என்னும் இடங்களை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிலுள்ளதோர் புள்ளியிடத்திற்குத் தலைக்கு நேர் மேலே ஒரு ஆகாய விமானம் தென்பட்டது. AB=2000 கெஜங்களானால், A, Bயிடங்களிலிருந்து நோக்குங் காலத்தில் அவ்விமானத்தின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 45°ம், 60°ம் ஆனால், அது எவ்வளவு உயரத்தில் இருந்திருக்க வேண்டும் என்பதை அறிக.

[விடை : 1268 கெஜம்]

5. நாற்பதடி உயரமுள்ளதோர் கட்டடத்தின் அடியிலிருந்தும், உச்சியிலிருந்தும் பார்க்குங்காலத்தில் ஒரு ஸ்தூபியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 45°ம், 30°ம் ஆக இருந்தனவெனில், அந்த ஸ்தூபியின் உயரத்தைக் கண்டறிக.

[விடை : 94·64′]

6. ஒரு சாலையின் ஒரு பக்கத்தில் தரைக்கு மேலே 10′ உயரத்திலுள்ள ஜன்னலிலிருந்து பக்கத்தில் நின்றதொரு மின்சாரக் கம்பத்தை நோக்கியபொழுது அதன் உச்சி 30° ஏற்றக் கோணத்திலும், அதனடி 45°இறக்கக் கோணத்திலும் இருந்தனவானால், அக்கம்பத்தின் உயரத்தையும், வீதியின் அகலத்தையும் கண்டறிக.

[விடை : 15·8, 10]

7. 200 அடி உயரமுள்ளதொரு குன்றின்மேலிருந்துகொண்டு ஒரு கோபுரத்தை நோக்கியபொழுது அதன் உச்சியும், அடிப்பாகமும் 30° 42′யும், 60° 12′யும் ஆகிய இறக்கக் கோணங்களில் காணப்பட்டதானால் அக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டறிக.

[விடை : 133·2′]

8. ஒரு மலையின் உச்சியிலிருந்து பார்த்தபொழுது அதன் அடிப்பாகத்தையொட்டிப் படுக்கைத் தளத்தில் சென்றதொரு வழியில்

அடுத்தடுத்து நின்ற இரண்டு மைல் கற்கள் 30°ம், 45°ம் ஆகிய இறக்கக் கோணங்களில் காணப்பட்டனவென்றால், அம்மலையின் உயரத்தை அளவிடுக.

[விடை: 7218·48′]

9. ஒருவன் கடற்கரையைச் சார்ந்ததொரு குன்றின்மேல் நின்று கொண்டு கடலிடையே 500 கஜங்களுக்கப்பால் இருந்த கப்பலின் பாய் மரத்திலிருந்த விளக்கையும், தண்ணீரில் தோன்றிய அதன் விம்பத்தையும், α, β என்னும் இறக்கக் கோணங்களில் கண்டானென்றால், அக் குன்றின் உயரம் $250 (\tan \alpha + \tan \beta)$ ஆகும் என்று காட்டுக.

10. ஒருவன் ஓர் ஏரிக்கரையிலே நீர் மட்டத்திற்கு 100 அடியுயரத்தில் நின்றுகொண்டு ஒரு மேகத்தை 45° ஏற்றக் கோணத்திலும், நீரில் தோன்றிய அதன் விம்பத்தை 60° இறக்கக் கோணத்திலும் கண்டானென்றால், அம் மேகம் நின்ற உயரத்தை அறிக.

[விடை: நீர்மட்டத்திற்குமேல் 373·2′]

11. கடலில் நின்ற A, B என்னும் இரண்டு கப்பல்களை யிணைக்கும் நேர்க்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிடத்தில் தலைக்கு நேர் மேலே $\frac{1}{2}$ மைல் உயரத்தில் பறந்துவந்த ஒரு ஆகாய விமானத்திலிருந்து பார்க்கப்பட்டபொழுது அக்கப்பல்கள் முறையே 25°, 55° இறக்கக் கோணங்களில் காணப்பட்டனவென்றால், அவற்றின் இடை தூரத்தைக் கண்டறிக.

[விடை: 1·4224 மைல்கள்]

12. ஒரு நட்ட கழியின் நிழல் அக்கழியின் உயரத்திற்கு $\sqrt{3}$ மடங்கு நீளமுள்ளதாக விழுந்திருந்தபொழுது, சூரியன் எவ்வளவு ஏற்றக் கோணத்தில் இருந்திருக்கவேண்டும் என்பதை அறிக.

[விடை: 30°]

13. ஒரு நேர்த்தளத் தரையில் நின்ற கோபுரமானது வீழ்த்திய நிழல் சூரியன் 45° குத்துயரத்தில் இருந்த பொழுதைவிட 30° குத்துயரத்தில் இருந்தபொழுது 40 அடி அதிக நீட்சியுடையதாக விளங்கியதென்றால், அக்கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

[விடை: $20(\sqrt{3}+1)'$]

14. ஒருவன் ஒரு கோபுரத்தின் நேர் தெற்கிலிருந்ததொரு புள்ளியிடத்திலிருந்து அதன் உச்சியை 60° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கின்

முன். பிறகு, படுக்கைத் தளத்தில் நேர்மேற்காக 200′ தூரம் நடந்து சென்று பார்க்கையில் ஏற்றக்கோணம் 45° ஆக இருந்தது. அப்படியானால், கோபுரத்தின் உயரத்தையும், அங்கிருந்து அவன் நின்ற இரண்டிடங்களின் தூரங்களேயும் கணக்கிடுக.

[விடை: $100\sqrt{6}$; $100\sqrt{2}$; $100\sqrt{6}$]

15. ஒருவன் தனக்கு நேர் எதிரே வடக்குத்திசையில் நின்ற கோபுரத்தை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் கண்டான். அங்கிருந்து நேர் மேற்காக 250′ நடந்து சென்றபின் ஏற்றக்கோணம் 30° ஆக இருக்கக் கண்டானென்முல் அக்கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

[விடை: 176·7′]

16. ஒரு குன்றை எதிர் நோக்கி நடந்துகொண்டிருந்த ஒரு மனிதன், அதன் உச்சியை 11° 35′ ஏற்றக் கோணத்தில் கண்டான். மேலும் 820 கஜ தூரம் அதனை நோக்கி நெருங்கிச் சென்றபின் அதனை மீண்டும் 65° 15′ ஏற்றக் கோணத்தில் கண்ணுற்றனென்றால் அக் குன்றினுடைய உயரத்தைக் கண்டறிக.

[விடை: 55،·8′]

17. படுக்கைத் தளத்தில் 1000 அடி விலகியிருந்த A, B என்னும் இரண்டு இடங்களுக்கு மேலே ஒரு பலூன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகர்ந்து செல்கிறது. Aக்கு மேலே இருக்கையில் Bயிலிருந்து நோக்கினால் 60° ஏற்றக் கோணத்திலும், Bக்கு மேலேயிருக்கையில் Aயிலிருந்து நோக்கினால் 30° ஏற்றக் கோணத்திலும் அது தென்பட்டது. அது Aயிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் சமதளத்தைத் தொடும்?

[விடை: 1500′]

18. தரைக்கு மேலே 1 கிலோ மீட்டர் உயரத்தில் படுக்கை மட்டமாகப் பறந்துகொண்டிருந்ததோர் ஆகாய விமானம் 60° ஏற்றக் கோணத்தில் காணப்பட்டது; 20 செகண்டுகள் கழிந்தபின் அது 30° ஏற்றக்கோணத்தில் காணப்பட்டது. அப்படியானால், அதன் ஒரு நிலைப் பட்ட வேகத்தை மணிக்கு இவ்வளவு என்று கண்டறிக.

[விடை: $120\sqrt{3}$ கி.மீ.]

19. 60′ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்த்த பொழுது, படுக்கைத் தளத்தில் அதன் அடிப்பாகத்துடன் ஒரே நேர்த்

கோட்டிலும் அதன் ஒரே பக்கத்திலும் உள்ள இரு பொருள்கள் முறையே 68°, 30° இறக்கக்கோணங்களில் காணப்படுகின்றன. அந்த இரண்டு பொருள்களுக்கும் இடையே உள்ள தொலைவினைக் கணக்கிடு.

[விடை : $40\sqrt{3}$]

20. ஒரே நேராக அமைந்த ஆற்றங்கரை ஓரத்தில் A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தூரம் 180 அடி. C எதிர்க்கரையில் காணப்படும் மற்றொரு புள்ளி. $\angle CAB = 60°$, $\angle CBA = 45°$ ஆனால், ஆற்றின் அகலத்தைக் கணக்கிட்டுக் காண்க.

[விடை : 114·12′]

21. தரையில் ஒரு இடத்திலிருந்து பார்த்தபொழுது ஒரு கோபுரத்தின் உச்சிக்கோணம் 45°ம், அந்த கோபுரத்தின்மீதுள்ள 30′ உயரமுள்ள கொடிக்கம்பத்தின் ஏற்றக் கோணம் 60°ம் ஆனால், அந்த கோபுரத்தின் உயரத்தையும், பார்வையிட்ட இடத்திற்கும் கோபுரத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

[விடை : 40·98′]

22. கடலிலோடிக் கொண்டிருந்த கப்பலில் இருந்த பிரயாணியொருவன் கரையின்கண் ஒன்றற்கொண்டு 5 மைல் தொலைவில் விலகி நின்ற இரண்டு பொருள்களை வடவடகிழக்கிலும் (N. N. E) வட கிழக்கிலும் (N. E·) இருக்கக் கண்டான். பிறகு, நேர்க்கீழ்த்திசை நோக்கி 1 மணி 10 நிமிடங்கள் சென்றபின், அவை வடக்குக்கு 7° மேற் றிசையில் (W of N) ஒரு நேர்க்கோட்டின் மேல் நிற்கக் கண்டான். படகின் வேகத்தையும், இரண்டாந்தடவை பார்த்தபொழுது நெருங்கி நின்ற பொருளிலிருந்து படகு இருந்த தொலையையுங் காண்க.

[விடை : 4·481 *m·p·h* 4·659 மைல்]

23. ஓரிடத்திலிருந்து நேர் தெற்கில் 5 மைல் தொலைவில் ஒரு கப்பல் காணப்பட்டது. அதிலிருந்து ஒரு படகு புறப்பட்டு தெற்குக்கு 10° கிழக்குத் திசையில் (East of South) செல்லத் தொடங்கிற்று. அரை மணி கழிந்ததும் அது தன் திசையை மாற்றிக்கொண்டு நேர்க் கிழக்காகச் சென்றது. மறுபடியும் அரைமணி கழித்து திசை மாறி Aயிலிருந்து தெற்குக்கு 31° கிழக்காகச் சென்றது. அப்படகின் வேகத்தைக் கண்டறிக.

[விடை : 10·57]

24. A என்ற துறைமுகத்திலிருந்து நேர் மேற்கே 10 மைல் தொலைவிலுள்ள B என்ற இடத்திலிருந்து பார்த்தபொழுது, மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் Aயை நோக்கி விரைந்துகொண்டிருந்த கப்பலொன்று கிழக்குத் திசையிலிருந்து 42° வடக்காக (42° North of East) தென்பட்டது. இதன்பிறகு $\frac{3}{4}$ மணி நேரத்தில் கப்பல் துறைமுகத்தை அடைந்தது என்றால், அது முதன்முறை காணப்பட்டபோது B யிலிருந்து அதன் தொலையையும் Aயிலிருந்து அதன் திசையையும் காண்க.

[விடை : 16·47 : 78° 30′ N. of E]

25 ஒரு கோபுரத்தின் அடிப்பாகத்தைச் சார்ந்து செல்லாத பாதையொன்றில் அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று மைல் கற்களிடத்திலிருந்து நோக்குங்கால், அக் கோபுரத்தின் உச்சி 30°, 45°, 60° ஏற்றக் கோணத்தில் காணப்படுமானால், அதன் உயரமெவ்வளவு?

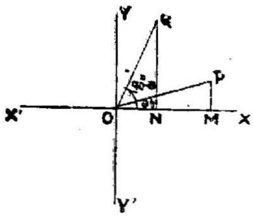
[விடை : 1077·56 கெ.]

IV. திரிகோணச் சார்பலன்களுக்கு வரைப்படங்கள்
(Graphs of Trigonometric Functions)

$\frac{\pi}{2} \pm \theta$; $\pi \pm \theta$; $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$: $2\pi - \theta$ அல்லது $-\theta$: $2\pi + \theta$, $2\pi + n\theta$ என்னும் இவற்றின் கோணத் தகவுகள். (Trigonometric Ratios)

1. θ ன் தகவுகளைச் சார்த்தி $(90° - \theta)$ ன் தகவுகளைக் கண்டறிதல்.

படத்தில் காட்டியபடி 0X உடன் OP, OQ என்பன முறையே θ, $(90° - \theta)$ என்னுங் கோணங்களை யுண்டாக்கி நிற்பதாகக் கொள்ளு



வோம். OP=OQ ஆகுக. OX க்கு PM, QN என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

OPM, OQN என்னும் இரண்டு முக்கோணங்களில்

$\angle POM = \angle OQN$, ஒவ்வொன்றும் θ க்குச் சமமாயிருத்தலால்

$\because \quad \angle M = \angle N$. ஒவ்வொன்றும் நேர்க்கோணமாதலால்,

$OP = OQ$, (அமைப்பு வகையால்)

இவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சருவசமத்தன்மை யுடையனவாம்.

$\therefore \quad ON = MP$[ராசிக்குறியிலும் (Sign) பருமனிலும் (Magnitude)]

$NQ = OM$[,, ,, ,,]

ஆகவே,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(9^\circ 0 - \theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{OM}{MP} = \cot\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$: $\sec(90 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$: $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$ என்பனவும் அமையும்.

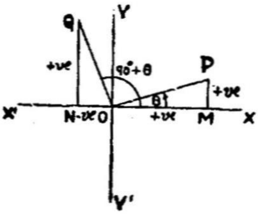
குறிப்பு 1: θ என்பது குறுங்கோணமாகிய வகைக்கு இப்படம் வரையப்பட்டிருந்தாலும், இங்கு பெற்ற பலன்கள் θ ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் ஏற்புடையனவேயாகும். θ ன் மற்ற மதிப்புக்களுத் தேவையானபடி படங்களை வரைந்து, இப்பலன்கள் பொருந்த நிற்கும் நிலைமையினைச் சரிபார்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

குறிப்பு 2: இரண்டு கோணங்களின் கூட்டுப்பலன் 90 ஆகுங்கால், அவையொன்றற்கொன்று நிரப்புக் கோணங்கள் (Complementary angles) எனப்படும். θ ம், $90^\circ - \theta$ம் இவ்வாருவனவாம்.

குறிப்பு 3: $(90^\circ - \theta)$ ன் கோணத்தகவுகள் அவற்றிற்குரிய நிரப்புக் கோணங்களின் எதிர்த்தகவுகளுக்கு (Co-ratios) ச் சமமாகும். இதன் உண்மையை 30°, 60° ஆகியவற்றின் தகவுகளைக் கொண்டறிக.

2. $90^\circ + \theta$ன் கோணத்தகவுகளை, θ ன் தகவுகளால் கண்டறிக.

OP, OQ என்பன OX ஒடு முறையே θ°, $90^\circ + \theta^\circ$ அடக்கிநிற்பன வாகக்கொள்க. $OP = OQ$ ஆக அமைக்க. OX க்கு PM, QN



என்னும் செங்குத்துக்கோடுகளை வரைக. OPM, OQN என்னும் முக்கோணங்களில்

$\angle POM = \angle OQN (=\theta)$

$\therefore \quad \angle M = \angle N (=90°)$

OP=OQ (அமைப்பு)

$\therefore$ OPM, OQN என்னும் இரண்டு முக்கோணங்களும் சருவசமமாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தத்தமக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ NQ=OM(ராசிக்குறியிலும், பருமனிலும்)

ON=−MP(ராசிக்குறியை அநுசரிக்குமிடத்து)

$$\therefore \quad \sin(90°+\theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90°+\theta) = \frac{ON}{OQ} = -\frac{MP}{OQ} = -\sin\theta$$

$$\tan(90°+\theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{OM}{-MP} = -\cot\theta$$

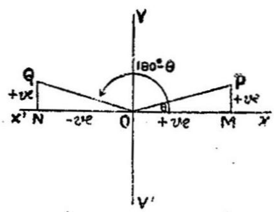
இவ்வாறே, cosec $(90°+\theta) = \sec\theta$ என்பதும், sec $(90°+\theta) = -\text{cosec}\,\theta$ என்பதும், cot $(90°+\theta) = -\tan\theta$ என்பதும் பெறப்படும்.

குறிப்பு : θ என்பது குறுங்கோணமாகுங்கால் இப்படம் வரையப்பட்டுள்ளதென்றாலும், இங்குப் பெற்ற பலன்கள் θ ன் எல்லா அளவுகளுக்கும் ஏற்புடையனவாகும். மாணவர்கள் மற்ற அளவுகளுக்கு ஏற்ற படங்களை வரைந்து தாம் பெற்ற பலன்களை இவற்றோடு சரிபார்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

பயிற்சி: 120°, 135°, 150° ஆகியவற்றின் கோணத்தகவுகளை யறிக.

3. θன் தகவுகளையொட்டி ($180^\circ - \theta$ ன் தகவுகளையறிதல்.

OP, OQ என்பன OX ஓடு முறையே θ, $180 - \theta$ என்னும் கோணங்களை அடக்கிக்கொண்டும், சமநீளமுள்ளனவாகவும் இருக்கும் படி வரைக. OXக்கு PM, QN என்னும் செங்குத்துக்கோடுகளையிடுக.



OPM, OQN என்னும் முக்கோணங்களில்

$$\angle POM = \angle QON \ (= \theta)$$

$\because$ $\angle M = \angle N \ (= \theta)$

OP = OQ (வரைவு)

$\therefore$ இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள்ளே சமமாவனவாகும்.

$\therefore$ NQ = MP (ராசிக் குறியிலும் பருமனிலும்)

ON = − OM (ராசிக் குறியை அநுசரிக்க)

$$\therefore \sin(180^\circ - \theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{ON}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos\theta$$

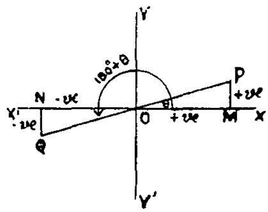
$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{+MP}{-OM} = -\tan\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$; $\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$ $\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$ ஆகக் கண்டறியப்படும்.

குறிப்பு : இப் பலன்கள் θன் எல்லா அளவுகளுக்கும் ஏற்கும்.

பயிற்சி : 120°, 135°, 150°களின் கோணத் தகவுகளையறிக.

4. θன் தகவுகளைச் சார்த்தி $(180^\circ+\theta)$ன் தகவுகளையறிதல்.



OP, OQ என்பன OX உடன் முறையே θம், $(180^\circ+\theta)$ம் ஆகிய கோணங்களை அமைத்துக்கொண்டிருப்பதாகவும், OP=OQ ஆகவும் கருதுக. PM, QN என்பன OXக்கு வரைந்த செங்குத்துக்கோடுகளாகும்.

இனி, OPM, OQN என்னும் முக்கோணங்களில்,

$$\angle POM = \angle QON \; (=\theta)$$

$\because$ $$\angle M = \angle N \; (=90^\circ)$$

$$OP = OQ \text{ (வரைவு)}$$

$\therefore$ இரண்டு முக்கோணங்களும் சருவ சமமாம்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தத்தமக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ $NQ = -MP$ (ராசிக்குறியை அநுசரிக்குங்கால்)

$ON = -OM$ (,,)

$$\therefore \sin(180^\circ+\theta) = \frac{NQ}{OQ} = -\frac{MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta) = \frac{ON}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{-MP}{-OM} = \tan\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

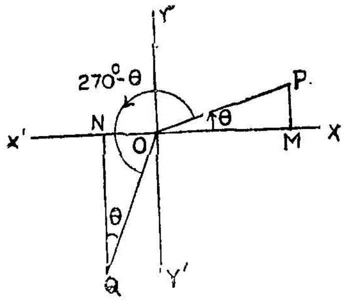
$\sec(180^\circ+\theta) = -\sec\theta$

$\cot(180^\circ+\theta) = +\cot\theta$ என்றறியப்படும்.

குறிப்பு: இப் பலன்கள் θன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் ஏற்கும்.

பயிற்சி: $210°$, $225°$, $240°$—என்னு மிவற்றின் தகவுகளை யறிக

5. θன் தகவுகளையொட்டி $(270-\theta)$ன் தகவுகளைக் கண்டறிதல்.



OP, OQக்கள் OX ஒடு முறையே θ, $270°-\theta$ என்னுங் கோணங்களை அடக்கிக் கொண்டும், நீளம் ஒத்தும் இருப்பதாகக் கொள்க.

P, Qக்களிலிருந்து OXக்கு PM, QN என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

இனி, MOP, QON என்னும் முக்கோணங்களில்

$\angle M = \angle N$ (நேர்க்கோணங்கள்)

$\because$ $\angle MOP = OQN \ (=\theta)$

$OP = OQ$ (வரைவு)

$\therefore$ இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமாம்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தத்தமக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ (ராசியைக் குறியை அநுசரிக்க),

$$ON = -MP$$

$$NQ = -OM$$

$$\therefore \ sin(270°-\theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

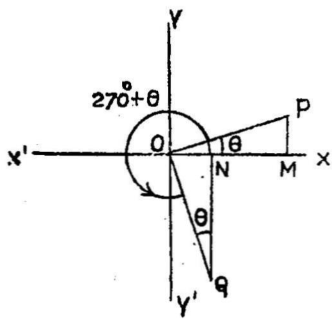
$$\cos(270^\circ-\theta)=\frac{ON}{OQ}=\frac{-MP}{OP}=-\sin\theta$$

$$\tan(270^\circ-\theta)=\frac{NQ}{ON}=\frac{-OM}{-MP}=\frac{OM}{MP}=\cot\theta$$

ஆகவே, $\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$; $\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$

6. θ ன் தகவுகளையொட்டி $(270^\circ+\theta)$ தகவுகளை யறிக :

OP, OQ என்பன OX ஓடு முறையே θ, $(270^\circ+\theta)$ என்னும் கோணங்களை உள்ளடக்கிக்கொண்டும் தாம் நீளமொத்தும் இருப்பன



வாகவும், PM, QN என்பன OX க்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடு களாகவும் கண்டுகொள்க.

பிறகு, $\triangle MOP$, $\triangle QON$ களில்

$\angle M=\angle N$ (நேர்க்கோணங்கள்)

$\because$ $\angle MOP=\angle OQN=\theta$

$OP=OQ$ (வரைவு)

$\therefore$ முக்கோணங்களிரண்டும் சர்வசமமாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

$\therefore$ $NQ=-OM$ (ராசிக்குறியையொட்டி)

$ON=PM$ (,,)

$$\therefore\ \sin(270^\circ+\theta)=\frac{NQ}{OQ}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta$$

$$\cos(270^\circ+\theta)=\frac{ON}{OQ}=\frac{MP}{OP}=\sin\theta$$

$$\tan(270^\circ+\theta)=\frac{NQ}{ON}=\frac{-OM}{MP}=-\cot\theta$$

இவற்றையொட்டி, விலோமங்க (Reciprocals) ளின் மதிப்பை யறியுமிடத்து

$\operatorname{cosec}(270+\theta)=-\sec\theta$ ஆமெனவும்

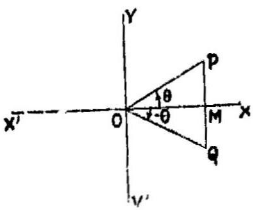
$\sec(270+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ ஆமெனவும்

$\cot(270+\theta)=-\tan\theta$ ஆமெனவும் வருமாறறிக.

பயிற்சி: முன்சென்ற பிரகரணங்களை (Articles) யுபயோகித்து $270-\theta$, $270+\theta$ என்பவற்றின் கோணத்தகவுகளை யறிக.

7. θன் தகவுகளால்$(360^\circ-\theta)$ அல்லது $-\theta$ன் தகவுகளை யறிக

OP, OQ என்னும் சமநீளக்கோடுகள் OX உடன் முறையே $\theta, -\theta$, என்னுங் கோணங்களை உள்ளடக்கி நிற்பதாகக் கொள்க PQ ஐச்



சேர்க்குங்கால் OX ஐ M என்னுமிடத்தில் ஊடறுப்பதாகவும் கொள்க.

(குறிப்பு: $360^\circ-\theta$ ம் $-\theta$ வும் ஒன்றே யாகுமாறு காண்க)

பிறகு $\triangle OPM$, $\triangle QM$ என்பவற்றுள்

OP = OQ (வரைவு)

$\because$ OM, பொது

$\angle POM = QOM$ (வரைவு)

ஆகவே, முக்கோணங்கள் சர்வசமமாகும்

$\therefore \quad \angle = \angle OMP = \angle OMQ$ ஆம். இவையிரண்டும் அடுத்துள்ள கோணங்களாம் ஆதலின், ஒவ்வொன்றும் ஒரு நேர்க்கோணத்திற்குச் சமமாகும். இவற்றோடு, $MQ = -MP$ (ராசிக் குறியையும் அநுசரிக்க)

$$\therefore \quad \sin(-\theta) = \frac{MQ}{OQ} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MQ}{OM} = \frac{-MP}{OM} = -\tan\theta$$

இங்ஙனமே,

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

குறிப்பு: θ ன் எல்லா அளவுகளுக்கும் இப்பலன்கள் பொருந்து மென்க.

பயிற்சி: $-30°$, $-45°$, $-60°$ என்பவற்றின் தகவுகளையும் அறிக.

8. θ ன் தகவுகளைத் தழுவி $360° + \theta$ ன் தகவுகளைக் காணுதல்:

$360° + \theta$ என்னும் கோணத்திற்குச் சுழல்வரும் எல்லைக்கோட்டின் முடிந்த நிலை θ க்குக் காணப்படுமாறே யாகும்.

ஆகவே, $360° + \theta$ க்கு ஏற்புடைய தகவுகளனைத்தும் θ வுக்கும் உரியவாக வருவனவேயாம்.

9. $(\theta \pm n.360°)$ ன் தகவுகளை θ ன் தகவுகளோடு சார்த்தியறிதல்.

சுழன்று வருங்கோடானது θ என்னும் கோணத்தை யுண்டாக்கி நின்றபின், தனராசித் திசையிலேனும், ருணராசித் திசையிலாகிலும் ஒன்றோ அல்லது பலவோ ஆகிய முழுச்சுற்றுகள் சென்றபிறகு

முன்னிருந்த நிலைக்கே வந்து சேருமாதலால், $\theta \pm 360^\circ$ ன் கோணத் தகவுகள் அனைத்தும் θ வுக்கு வாய்க்கும் தகவுகளுக்கு ஒத்தே இருக்கும்.

ஆகவே, 360° ன் யாதொரு மடங்கையும் ஒரு கோணத்தோடு கூட்டினாலும், அல்லது அதிலிருந்து கழித்தாலும் அதன் கோணத் தகவுகள் வேறுபடாவாம். எவ்வாறெனின்,

$$\sin(\theta \pm n \,.\, 360^\circ) = \sin\theta$$

$$\cos(\theta \pm n \,.\, 360^\circ) \quad \cos\theta$$

$$\tan(\theta \pm n \,.\, 360^\circ) = \tan\theta \text{ ஆம்.}$$

இவ்வாறே பிறவும் வரக் காண்க.

மேலே பல பகுதிகளில் பெற்ற பலன்களையெல்லாம் கீழ்கண்ட அட்டவணை காட்டி நிற்பதாகும்.

$x=$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$ அல்லது $-\theta$	$2\pi+\theta$
$\sin x=$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
$\cos x=$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
$\tan x=$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

மேற்கண்ட பலன்கள் யாவும் பின்வரும் விதியால் நினைவுறப்படும்:

n ஆனது ஒரு இரட்டை முழு எண்ணாகும்பொழுது. $n\,.90 \pm \theta$ ன் யாதொரு கோணத்தகவின் சார்பலனும் எண்ணளவுமட்டில் θ ன் அதே தகவின் சார்பலனுக்குச் சமமாயிருக்கும்

n ஆனது ஒரு ஒற்றை முழு எண்ணாகும்பொழுது $n\,.\,90 \pm \theta$ ன் யாதொரு கோணத்தகவின் சார்பலனும் எண்ணளவுமட்டில் θ ன் எதிர்த்தகவுக்குரிய சார்பலனுக்குச் சமமாகும்.

இராசிக்குறியை அறிய, $n\,.90 \pm \theta$ ஆனது எந்த கால்வட்டத்தில் இடம்பெறுமோ அங்கு (θ ஆனது குறுங்கோணமாகக் கருதி) எந்தத்

தகவுக்கு என்ன ராசிக்குறி விதிப்படி பெறக்கூடுமோ அதனை முன்னே யிட்டு எழுதிக்கொள்ள வேண்டும்.

10. மேலே 1 முதல் 9 வரையிலுள்ள அங்கங்களில் வருவித்த, சூத்திரங்கள் யாதொரு கோணத்தின் தகவுகளையும் 0° முதல் 45° வரையில் கிடக்கும் எந்த கோணத்தின் தகவுகளோடு சார்த்தியறியச் சாத்தியப்படுத்துகின்றன. 0° முதல் 45° வரையிலுள்ள கோணங்களின் தகவுகளை அட்டவணைகளிலிருந்து அறியலாம்.

ஒரு கோணமானது 360° க்கு மேற்பட்டிருந்தால், 360° ன் மடங்குகளைக் கழித்து விட்டு அதனை 0° க்கும் 360° க்கும் இடையில் படுமாறு செய்யவேண்டும். பிறகு $180 \pm \theta$, $90 \pm \theta$, $-\theta$ என்பவற்றிற்குப் பெற்ற சூத்திரங்களை யுபயோகித்து, கோணத்தகவை 0° க்கும் 45°க்கும் இடையில் கிடக்குமாறு ஒடுக்கிக்கொள்ளலாம்.

உதாரணமாக,

$$\sin 947^\circ = \sin(2\times 360^\circ + 227^\circ) = -\sin 227^\circ$$
$$= \sin(180^\circ + 47^\circ) = \sin 47^\circ$$

$$\tan 1142^\circ = \tan(3\times 360^\circ + 62^\circ) = \tan 62^\circ$$
$$= \tan(90^\circ - 28^\circ) = \cot 28^\circ$$

$$\cot(-1106^\circ) = \cot(-3\times 360^\circ - 26^\circ) = \cot(-26^\circ)$$
$$= -\cot 26^\circ.$$

கோணத் தகவுகளை முதல் கால் வட்டத்தில் கொண்டொடுக்கி யறிவதற்குப் பின்வரும் விதியைக் கடைப்பிடிக்கலாம்.

யாதொரு கோணத்தினுடைய எந்தத் தகவையேனும் கண்டறிய முதலில் θ ன் முடிவுகோலைப் பக்கத்துக்கும் X அச்சுக்கும் இடைப்படும் குறுங்கோணத்திற்குரிய அதே சார்பலனை யெடுத்துக்கொண்டு, (இரண்டாம் அத்தியாயத்தில் 4 வது பிரிவில்) கால்வட்டங்களுக்கு நியமித்த குறியறி விதிப்படி ஏற்ற இயல்கணித ராசிக்குறியைக் கண்டறிந்து அச்சார்பலனுக்கு முன்னே இணைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

11. திரிகோணச் சார்பலன்களின் போழ்துகள் (Periods of Trigonometric Functions)

ஒரு கோணமானது 0° விலிருந்து 360°க்கு அதிகரித்துச் செல்லுங் கால், அதன் நெடுக்கை (Sine) த்தகவானது படிப்படியாக அதன் மதிப்பு மாற்றங்களையெல்லாம் பெற்றுக்கொண்டு முன்னைய மதிப்புக்கே திரும்பி வந்தடைகின்றதாகும். அக்கோணம் 360° யிலிருந்து 720° வரையில் தொடர்ந்து பெருகுதலுறின், நெடுக்கைத் தகவு முன்னே பெற்றுக்கொண்ட அதே வரிசைப்பட்ட மாற்றங்களையே கொள்ளும். எவ்விரு கோணங்களேனும் நான்கு நேர்க்கோணங்கள் அல்லது 360° வித்தியாசப்பட்டிருந்தால் அவற்றின் நெடுக்கை (Sine)த் தகவுகள் ஒருபடித்தாய் ஒத்திருப்பனவேயாம்.

நெடுக்கை (Sine) யின் மதிப்புக்கள் கோணம் 360° இடைப்பாடு அல்லது போழ்தில் சரியொத்த தன்மையில் திரும்பித் திரும்பி வருதலால் நெடுக்கை (Sine) யை 360° அல்லது 2π ஆரையன்களாகிய போழ்தின் போழ்துச் சார்பலன் (Periodic Function) என்று கூறுகிறோம். இங்ஙனமே, கிடக்கை(Cosine), எதிர்கிடக்கை(Secant), எதிர்நெடுக்கை (Cosecant) களும் கோணமானது 2π ஆரையன்களாக அதிகரிக்குங் கால் எல்லாவித மாறுபாடுகளையும் படிப்படியாக அடைந்து மீண்டும் அவற்றையே திரும்பிப் பெறுதலுறும்.

ஆகவே, sine, cosine, secant, cosecant ஆகவற்றிற்கு 2π ஆரையன்களே பொழுதாகுமாறு காண்கின்றோம்.

எனினும், இருக்கை (tangent) யானது, 0 முதல்கொண்டு π ஆரையன் வரைக்கும் அதிகரிக்கையில் எல்லா மாறுபாடுகளையும் அடைந்துவிடக் காண்கின்றோம். அது 0 க்கும் $\frac{\pi}{2}$ க்கும் இடைப்பட்டு அதிகரித்து வருங்காலத்திலேயே 0 முதல் $+\infty$ வரையிலும் உள்ள மதிப்புக்களை அடைவதாகின்றது; மேலும் $\frac{\pi}{2}$ யிலிருந்து π க்கு வருகையில், $-\infty$ யிலிருந்து 0 வரையில் கிடக்கும் எல்லா மதிப்புக்களையும் பெறுவதாகின்றது. π முதல் 2π ஆரையன்கள் வரையில், அது மீண்டும் 0 முதல் $+\infty$ வரையிலும், $-\infty$ முதல் 0 வரையிலுள்ள எல்லா நிச மதிப்புக்களையும் எய்தாநிற்கின்றது.

ஆகவே, tangent ன் போழ்து π ஆரையன்களாகும். இவ்வாறே cotangent ன் போழ்தும் π ஆரையன்களேயாம்.

இவற்றிலிருந்து நாமறியக்கிடப்பன யாவையெனின், sine, cosine களின் மதிப்புக்கள் 0 க்கும் ± 1க்கும் இடையில் பரந்து பட்டு நிற்பதால், இவற்றின் மதிப்புக்கள் +1 க்கும் −1 க்கும் இடைப்பட்டே கிடப்பன வாம்: cosecant, cotangent ஆவன +1 க்கும் +∞ க்கும் இடை யிலும், −1 க்கும் −∞ க்கும் இடையிலும் பரந்து பட்டு நிற்றலின், அவற்றின் மதிப்புக்கள் எப்பொழுதும் +1 க்கும் −1 க்கும் இடைப் பட்டுக்கிடப்பனவாகா; tangent, cotangent ஆவன 0 க்கும் ± ∞ க்கும் இடையே பரந்து பட்டு நிற்றலால், அவற்றின் மதிப்பு எவ்வளவு தனராசி அல்லது ருணராசிப் பரும (Magnitude) முகவேனும் இருக்கலாம்.

மேலும், ஒவ்வொரு தகவும் 0 அல்லது அநந்தம் (Infinity) வழியாகத் தனது மதிப்பு புகப்பெறுங்காலத்தில் தனது இராசிக் குறியையும் மாற்றிக் கொள்ளுகின்றது. உண்மையில், அதே தகவானது அதே சமயத்தில் +0 மும் −0 மும் மாகிய மதிப்பைப் பெறுவதாகக் கருதப்படும். யாங்ஙனமெனனின், 0Y அச்சானது முதல் கால் வட்டத்தின் முடிவிடத்ததாகிய எல்லைக் கோடாகக் கொள்ளக் கிடத்தலின், cos 90 ன் மதிப்பானது முதல் கால்வட்டத்தின் முடிவு நிலையிலிருந்தால் தனராசி (+) யாகவும், இரண்டாம் கால்வட்டத்தின் ஆரம்பத்திலிருந்தால் ருணராசி (−) யாகவும் மாறும். ஆதலால் இவற்றிற்கு ஏற்ப cos $90^\circ = +0$ அல்லது -0 ஆகும்.

இதற்கு ஒப்பதாகவே +∞ அல்லது −∞ யாகிய மதிப்புக்களுக்கும் கூறிக் கொள்ளலாம். இதனால், ஒரு கோணமானது முதல் கால்வட்டத்தி லிருந்தோ அல்லது இரண்டாம் கால்வட்டத்திலிருந்தோ 90° க்குச் செல்லும் போக்கிலிருக்கும்பொழுது அதன் tan $90^\circ = +\infty$ அல்லது $-\infty$ ஆகக்கொள்ளுகின்றோம்.

மேலும், ஒரு கோணமானது 0° யிலிருந்து 90° க்கு வளர்ந்து வருகையில், sine, secant, tangent ஆகியவை தத்தம் மதிப்புக்கள் பெருகிவரவும், cosine, cotangent, cosecant என்பன குறைந்து போகவும் காண்கின்றோம். [மாணவர்கள் தமது நினைவிற்கு உதவியாக முதல் கால்வட்டத்தில் C என்னும் முன்னிணைப்புள்ள cosine,

cotangent, cosecant என்னும் திரிகோணத் தகவுகள் மூன்றும் கோணம் வளரத் தம்மதிப்பு குறைவுறப் பெறுவதாகக் கருத்தில் இருத்திக் கொள்ளலாம்.]

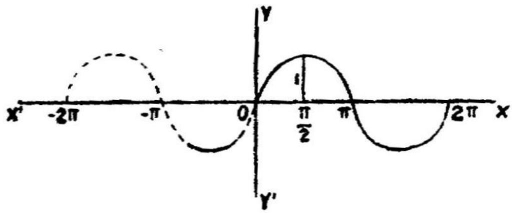
3. திரிகோணச் சார்புகளின் வரைப்படங்கள் (Graphs of Trigonometric Functions)

X'OX, Y'OY என ஒன்றற்கு ஒன்று செங்குத்தாகிய இரண்டு கோடுகளை அச்சுநிலைகளாகக் கொள்க. X'OX ன் வழியாக வுள்ள நீளங்கள் θ ஐ குறிப்பிடுவனவாகுக. தனராசிக் கோணங்களை OX லும் ருணராசிக் கோணங்களை OX' லும் அமைக்க. சௌகரியத்திற்காக 1″ ஆனது 90° அல்லது $\frac{\pi}{2}$ ஆரையன்களைக் காட்டுவதாக்குக. Y அச்சில் கோணத்தகவுகளின் பருமன்களைக் காட்டத்தக்க அளவைக் கொள்க. OX ன் மேல் θ உள்ள இடத்தில் ஒரு நேர்செங்குத்துக் கோட்டினைக் குறிப்பிட்ட கோணத்தகவுக்குத் தக்க உயரமுள்ள தாகும்படி நிறுத்துக. பிறகு பல்வேறு திரிகோண சார்பலன்களுக்கான வரைப்படங்கள் கீழே காட்டியபடி உருவமைப்பைக் கொள்ளும்.

(i) நெடுக்கை (sine) யின் வரைப்படம் :

θ	0	30	45	60	90	120	135	150	180
sin θ	0	·5	·71	·87	1	·87	·71	·5	0
cosec θ	± ∞	2	1·41	1·15	1	1·15	1·41	2	± ∞

θ	210	225	240	270	300	315	330	360
sin θ	—·5	—·71	—·87	—1	—·87	—·71	—·5	0
cosec θ	—2	—1·41	—1·15	—1	—1·15	—1·41	—2	± ∞

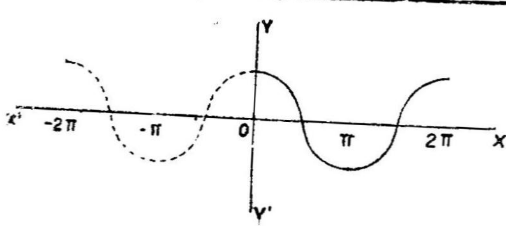


Sine$(2\pi+\theta)=\sin\theta$ ஆதலின், sine ஆனது 2π ஆரையன்களின் **போழ்துச் சார்பலனுகும்** (Periodic Function). வரைப் படத்தில் தடித்த கோட்டினுல் குறித்த பகுதியானது ஒரு போழ்தில் வளைவு அடையும் இயல்பினைக் காட்டுவதாகும். புள்ளியிட்டுக் காட்டிய கோடானது மற்ற போழ்துகளில் அதே மதிப்பு வேறுபாடுகள் ஒத்த போழ்துதோறும் திரும்பித் திரும்பி வருதலைத் தெரிவிப்பதாகும்.

Cosine (கிடக்கை) வரைப்படம்

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180
$\cos\theta$	1	·87	·71	5	0	− 5	−·71	−·87	−1
$\sec\theta$	1	1·15	1·41	2	$\pm\infty$	−2	−1·41	−1.15	−1

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\cos\theta$	−·87	−·71	−·5	0	·5	·71	·87	1
$\sec\theta$	−1·15	−1·41	−2	$\pm\infty$	·2	1·41	1·15	1



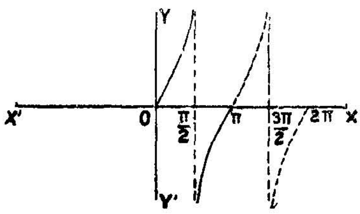
தடித்த கோடிட்டுக் காட்டிய வரைப்படப் பகுதியானது 2π ஆரையன் போழ்தில் வளைவுகோட்டின் தன்மையைக் காட்டுவதாகும்,

Sine ன் வரைப்படத்தில் OY அச்சைத் தனராசித் திசையில் $\frac{\pi}{2}$ ஆரையன் தூரம் தள்ளி நிறுத்தினால் இதற்கொத்த வரைப்படம் வரக் காண்கின்றோம்.

இருக்கை θ (tan θ) ன் வரைப்படம்

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150	180
tan θ	0	·58	1	1·73	$\pm\infty$	—1·73	—1	—·58	0
cot θ	$\pm\infty$	1·73	1	·58	0	—.58	—1·73	—1·73	$\pm\infty$

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	363°
tan θ	·58	1	1·73	$\pm\infty$	—1·73	—1	—·58	0
cot θ	1 73	1	·58	0	—·58	—1	—1·73	$\pm\infty$



$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ஆக, tan $\theta \rightarrow \infty$ ஆகின்றது. $\frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில் நாட்டிய செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் அநந்தமாகும். வளைவுக் கோடும் தனராசித் திசையில் அநந்த நிலைக்குச் செல்லுவதாகின்றது. நேர்க்கோணத்திற்கு ஒரு சிறிது அதிகப்படுமானால், tangent ஆனது ருணராசியைச் சாரும். அப்பொழுது அதன் தகவும் அநந்தமாகும். இதனால், வளைவுக் கோடானது திடீரென்று பாய்ந்து X அச்சுக்குக்

கீழே அநந்த தூரத்தில் தொடங்க ஆரம்பிக்கின்றது. இது $\frac{\pi}{2}$ இடத்தில் முன்னே காட்டிய் செங்கோட்டின் மறுபக்கத்தில் நிகழுவதாகும். இதனால், tan θ ன் வரைப்படமானது தொடர்பறுந்து, ஒத்த காட்சிய வாகிய அநந்தங்கிளைகள் சமாந்தரத்தில் அமைந்திருக்கக் காண்கின்றோம். இப்பல்வேறு கிளைகளும், $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$ என்று குறிப்பிட்ட புள்ளியிடங்களில் Y அச்சுக்குச் சமாந்தரத்தில் புள்ளியிட்டுக் காட்டிய கோடுகளைத் தொட்டு நிற்பதனைக் காண்கின்றோம்.

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ ஆதலால், $\sin\theta$, $\cos\theta$ க்களும் அவற்றின் விலோமங்களும் தனித்தனியாக **2π ஆரையன் போழ்து** (Period) பெறுமாறு போல்வதன்றி, **π ஆரையன் போழ்திலேயே** தமக்குரிய மதிப்புக்களையெல்லாம் பெற்று நிற்றல் உணரப்படும்.

மாதிரி வினுக்கள்

1. மதிப்பறிக : $\dfrac{\sin 300^\circ \tan 330^\circ \sec(-420^\circ)}{\cot 135^\circ \cos 210^\circ \operatorname{cosec} 315^\circ}$.

விடை :

$$\sin 300^\circ=\sin(360^\circ-60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(-420^\circ)=\sec 420^\circ=\sec(360^\circ+60^\circ)=\sec 60^\circ=2$$

$$\cot 135^\circ=\cot(180^\circ-45^\circ)=-\cot 45^\circ=-1$$

$$\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} 315^\circ=\operatorname{cosec}(360^\circ-45^\circ)=-\operatorname{cosec} 45^\circ=-\sqrt{2}$$

$\therefore$ கொடுத்த கணக்கின் மதிப்பு : $\dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times 2}{(-1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{2})}$

$$= \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

2, சுருக்குக :

$$\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} + \frac{\cos A}{\sin(270^\circ + A)}$$

கொடுக்கப்பட்ட கோவை

$$= \frac{-\sin A}{-\sin A} - \frac{(-\cot A)}{\cot A} + \frac{\cos A}{-(\cos A)} = 1+1-1=1.$$

பயிற்சி 4

1. (a) அட்டவணையை உபயோகிக்காமல்பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் கண்டெழுதுக.

(i) sec (-420°), (ii) cosec 225°, (iii) cot (-270°), (iv) tan 1396° (v) sin (-1080°), (vi) cos (-1063°) (vii) cos315° (viii) sin 540° (ix) tan (-135°) (x) cosec (-840°).

(b) பின்வருவவற்றின் மதிப்புக்களை 45°க்குக்குறைந்த தனராசிக் கோணங்களோடு சார்த்திக் கூறுக.

(i) sec (-1530°), (ii) cosec (-670°) (iii) sin (-890°) (iv) tan 1000° (v) cos (-987°) (vi) cot (-1050°) (vii) cot $\dfrac{23\pi}{4}$ (vii) cosec $\dfrac{26\pi}{7}$

2. மதிப்புக்களைக் கண்டறிக: (அட்டவணையை உபயோகிக்காமல்)

(i) $\sin 510^\circ \cos(-570^\circ) - \sin 330^\circ \operatorname{cosec} 390^\circ$

[விடை : $(4-\sqrt{3})/4$]

(ii) $\tan 225^\circ . \cot 405^\circ . \cot 675^\circ . \tan 765^\circ$

[விடை : -1]

(iii) $\sin 780^\circ \sin 480 + \cos 120^\circ \cos 60^\circ$

[விடை : $\frac{1}{2}$]

(iv) $\sin 600^\circ \cos 330^\circ + \cos 120^\circ \sin 150^\circ$

[விடை : -1]

(v) $\sin 743^\circ \cos 367^\circ + \cos 1103^\circ \sin 727^\circ$

[விடை : $\frac{1}{2}$]

3. சுருக்குக :

(i) $$\frac{\tan(180^\circ - A)\ \sin(-A)\ \tan(90^\circ - A)}{\cos(360^\circ - A)\ \cot(90^\circ + A)\ \sin(180 + A)}$$

[விடை : $\operatorname{cosec} A$]

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin(\pi - \theta) - \sin(\pi + \theta) - \sin(-\theta)$

[விடை : $2 \sin \theta$]

(iii) $$\frac{\tan(90^\circ + \theta)}{\cot \theta} + \frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos \theta} + \frac{\sin(-\theta)}{\sin(180 + \theta)}$$

[விடை : 1]

(iv) $$\frac{\cos(90^\circ + \alpha)\ \tan(180^\circ - \alpha)\ \sec(-\alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)\ \cot(90^\circ - \alpha)\ \sec(360^\circ + \alpha)}$$

[விடை : 1]

(v) $$\frac{\sin(180^\circ + A)\ \cos(90^\circ - A)\ \tan(270^\circ - A)}{\sec(540^\circ - A)\ \cos(360^\circ + A)}$$

[விடை : $\sin A \cos A$]

(vi) $$\frac{\cos(90^\circ + \theta)\ \sec(-\theta)\ \tan(180^\circ - \theta)}{\sec(360^\circ - \theta)\ \sin(180^\circ + \theta)\ \cot(90^\circ - \theta)}$$

[விடை : -1]

4. பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\sin A \tan (90^\circ - A) \sec (90^\circ - A) = \cot A$

(ii) $\tan (-A) + \tan (270^\circ + A) + \tan (180^\circ + A) + \cot A = 0$

(iii) $\operatorname{cosec} (270^\circ - \alpha) - \sec (180^\circ + \alpha) + \cot (90^\circ + \alpha)$
$- \tan (180^\circ - \alpha) + \sin (-\alpha) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$

(iv) $\sec (630^\circ - A) \sec (90^\circ - A) + \tan (270^\circ - A) \tan (90^\circ - A)$
$+ 1 = 0.$

5. 0°க்கும் 360°க்கும் இடையே உள்ள எந்த மதிப்புக்கள் கீழ்க் கண்ட சாம்யங்களுக்குப் பொருந்தும்.

(i) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ (ii) $\cot \theta = -\sqrt{3}$ (iii) $\cos \theta = \frac{1}{2}$

(iv) $\tan \theta = -1$ (v) $\sec \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) $\operatorname{cosec} \theta = -\sqrt{2}$

6. $\sec 225^\circ$க்குச் சமமான tangent களையுடையவாகி 4 கால் வட்டப் பகுதிகளிலும் உள்ளகோணங்களின் sine களையும், cosine களையும் கண்டறிக.

[விடை : $\sin \theta = \pm \sqrt{2/3}$; $\cos \theta = \mp 1/\sqrt{3}$]

7. x என்பது 4வது கால் வட்டத்தில் உள்ள ஏதேனுமொரு கோணமானல், $270^\circ - x$ என்னுங் கோணத்தை வரைந்து, அதன் கோணத்தகவுகளை xன் தகவுகளைச் சார்த்திக் கூறுக.

8. காட்டுக :

(i) $\tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \tan 50^\circ \tan 60^\circ$
$\tan 70^\circ \tan 80^\circ = 1$

(ii) $\cos 33^\circ \tan 33^\circ \tan 57^\circ \operatorname{cosec} 57^\circ = 1$

(iii) $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0$

(iv) $\tan\frac{\pi}{9}+\tan\frac{4\pi}{9}+\tan\frac{5\pi}{9}+\tan\frac{8\pi}{9}=0$

(v) $\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{3\pi}{8}+\tan\frac{5\pi}{8}+\tan\frac{7\pi}{8}=0$

(vi) $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

(vii) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}=0$

(viii) $\tan\frac{\pi}{13}+\tan\frac{5\pi}{13}+\tan\frac{8\pi}{13}+\tan\frac{12\pi}{13}=0$

(ix) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}\sin^2\frac{7\pi}{8}=0$

(x) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=2$

9. 0°க்கும், 360°க்கும் இடைப்பட்டதாகியும் $4\cos\theta+3\sin\theta=2{\cdot}5$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துவதாகியும் கிடைக்கும் கோணங்களின் மதிப்புக்களைப் பாகை, கலைகளில் கண்டறிக.

[விடை : 96° 52′ ; 336° 52′]

10. $3\cos\theta+4\sin\theta$ என்னும் கோவை 0 இருந்து 2πக்கு வளருகையில் அதனுடைய ராசிக்குறியிலும், மதிப்பிலும் உண்டாகும் மாறுதல்களை தொடர்ந்தறிந்து குறிப்பிடுக. இக்கோவையின் அதிகப் பட்ட மதிப்பு யாது ?

[விடை : 5]

11. 0°க்கும் 180°க்கும் இடைப்படுவனவாகிய எல்லா மதிப்புக் களுக்கும் $\sin 5x=\cos 2x$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

[விடை : $(\pi/14)$ or $(\pi/6)$ ஆரையன்கள்]

12. $2\sin^2\theta=3\cos\theta$ வுக்குப் பொருந்துவதாகி 0°க்கும் 360°க்கும் இடையே கிடக்கும் xன் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 60° அல்லது 300°]

13. cosec x, (i) sec x (ii) cot x என்பவற்றின் வரைப்படங்களை அமைக்க.

14. $2\cos x+5\sin x$ ன் வரைப்படத்தை வரைந்து, அதனையுபயோகித்து $2\cos x+5\sin x=4$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வு அறிக:

[விடை: 110·14′; 26° 10′]

15. ABC என்ற முக்கோணத்தின் கோணங்களைப்பற்றிய பின்வரும் சம்பந்தங்களை நிரூபி.

(i) $\sin(A+B)=\sin C$ (ii) $\cos(A+B)=-\cos C$

(iii) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$ (iv) $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

V. கூட்டலும், இரட்டைப்படுத்தலும் ஆகிய தேற்றங்கள்; பெருக்கல் தேற்றங்கள்

(Addition & duplication formulae, product formulae)

1. நிரூபித்தல்:

(i) $\sin(A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B.$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B.$

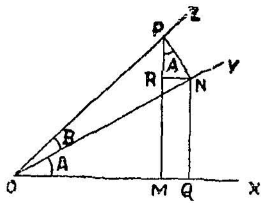
(iii) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}$

$\angle XOY=A$, $\angle YOZ=B$ எனக் கொள்க. இதனால், $\angle XOZ=A+B$ ஆகும். இவ்வாறாகிய கலப்புக்கோண (Compound Angle)த்தின் எல்லைக்கோடாகிய OZன் மேல் யாதேனும் P என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து, அங்கிருந்து, PM, PN என்னும் கோடுகளை முறையே OX, OY என்பவற்றிற்கு நேர்ச் செங்குத்தாக வரைக. N என்னும் புள்ளியிடத்திலிருந்து OX, MP என்பவற்றிற்கு முறையே NQ, NR என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

இப்பொழுது, $\angle RPN=90^\circ-\angle PNR=\angle PNO-\angle PNR=$

$\angle RNO$ = ஒன்றுவிட்ட $\angle A$ ஆகும்.

இலக்கண வரையறைக்கேற்க,



$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{MR+RP}{OP}$$

$$=\frac{QN+RP}{OP}=\frac{QN}{OP}+\frac{RP}{OP}$$

$$=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{RP}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$\therefore$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ என வருமாறறியப் படும்.

(ii) $\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}=\frac{OQ-RN}{OP}$

[MQRN ஒரு நீண்ட சதுரம் அல்லது செவ்வகமாதலின்]

$$=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}$$

$$=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

(மேற்காட்டிய குறிப்பைக் காண்க)

$$=\cos A\,.\,\cos B-\sin A\,.\,\sin B.$$

* இங்கு, நாம் பெறவேண்டிய கோணத்தகவுகள் நிரம்புதற்குப் பக்க வுறுப்புக்கள் போதாமையால், அதற்குப் பயன்பட்டு நிற்கும் ON, NP என்னும் கர்ணங்களைக் காரணிகளாகக் கொண்டு, ஏற்றபடி விகிதங்களோடு சார்த்தி, யுவற்றின் மதிப்புக்கள் மாருதபடி பெருக்கிக் கொண்டோம் என்றறிக.)

(iii) $\tan(A+B) = \frac{MP}{OM} = \frac{MR+RP}{OQ-MQ} = \frac{QN+RP}{OQ-RN}$

$$= \frac{\frac{QN}{OQ} + \frac{RP}{OQ}}{1-\frac{RN}{OQ}}$$ (பகுதி, தொகுதியென்னு மிரண்டையும் OQ ஆல் வகுக்க)

$$= \frac{\frac{QN}{OQ} + \frac{RP}{OQ}}{1-\frac{RN}{RP}\cdot\frac{RP}{OQ}}$$

ΔRPN, ΔOQN என்பன வடிவொத்தனவாதலின்,

$\frac{RP}{OQ} = \frac{PN}{ON} = \tan B$ எனப்பெறுகின்றோம்.

மேலும், $\frac{QN}{OQ} = \tan A = \frac{RN}{RP}$

$$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\frac{QN}{OQ} + \frac{RP}{OQ}}{1-\frac{RN}{RP}\cdot\frac{RP}{OQ}}$$ [இவ்விகிதங்களுக்கு மேலே பெற்ற இருக்கைகளை (tangents) ஏற்றபடி பிரதியிட]

$$= \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}$$ ஆக வரும்.

கிளை 1 :

$\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$களின் விரிப்புக்களிலிருந்து $\tan(A+B)$யின் விரிப்பினை வருவிக்க.

கிளை 2 :

$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$ என்றதனை வருவிக்க.

கிளை 3 :

75°க்கும் 105°க்கும் கோணத் தகவுகளைக் காண்க.

$\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

இவ்வாறே,

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$ எனக் கண்டறியப்படும்.

இனி,

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து 105°க்குரிய கோணத்தகவுகளைப் பெறலாகும்.

2. மடங்கு கோணங்களும் (Multiple angles), காரணப்பகுதிக் கோணங்களும் (Sub multiple angles)

2A கோணத்தின் தகவுகள்

மேலே பெற்ற பலன்களில் B=A என்று பிரதியீடு செய்க.

நாம், $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

என்பனவற்றைப் பெறுகின்றோம்.

Aக்குப் பதிலாக A/2 ஐப் பிரதியீடு செய்தாலும், மேற்கண்ட தொடர்புகளெல்லாம் இயைபுறுவனவே யாம்.

ஆகவே, $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$$

என்பனவற்றையும் பெறுகின்றோம்.

கிளை 1 :

$$2 \cos^2 A = 1 + \cos 2A;$$

$$2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A$$

கிளை 2 :

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \sin A}{\cos A} \cos^2 A$$

$$= 2 \tan A \, . \cos^2 A = \frac{2 \tan A}{\sec^2 A} = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A (1 - \tan^2 A) = \frac{1 - \tan^2 A}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

கிளை 3 :

$$\tan A = \frac{1 - \cos 2A}{\sin 2A} = \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} .$$

3. மூன்று கோணங்களுக்குக் கூட்டல் தொகைச் சூத்திரங்கள்:

$$\sin (A + B + C) = \sin (\overline{A + B} + C)$$

$$= \sin (A + B) \cos C + \cos (A + B) \sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$$

இவ்வாறே,

$$\cos (A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B.$$

$$\tan (A + B + C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

எனப் பிறவும் வரக் காணலாம்,

பயிற்சி :

cot (A+B+C)ஐ cot A, cot B, cotC யொடு சார்த்தி விரித்துரைக்க

4. 3A ன் திரிகோணத் தகவுகள் :

மேலே காட்டிய சூத்திரங்களில் A=B=C என்றிடுக. அப்பொழுது

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$ என்பனவற்றைப் பெறுகின்றோம்.

மறுவழி

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A\\ &= 2\sin A\cos A\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A\\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A\end{aligned}$$

இவ்வாறே, cos A, tan 3A என்பனவற்றிற்கும் கண்டறியலாம்.

பயிற்சி : cot 3Aஐ cot A யின் பலனாகக் கண்டறிக.

5. திரிகோண முறையில் sin 18°, cos 36°களின் மதிப்பைக் கண்டறிதல் :

θ என்பது 18°ஐக் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோமானால். $5\theta = 90°$ ஆம். $\therefore$ $2\theta = 90 - 3\theta$ ஆம்.

$$\sin 2\theta = \sin(90 - 3\theta) = \cos 3\theta$$

அல்லது $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

இப்பொழுது $\cos\theta = \cos 18°$ ஆதலின் தனராசியாகும். ஆகவே தனராசியாகிய $\cos\theta$ஆல்இரு பக்கங்களிலும் வகுக்க,

$$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1-\sin^2\theta) - 3$$

$$= 1 - 4\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$$

இதனை, $\sin\theta$ன் இருபடிச் சமன்பாடாகக் கொண்டு தீர்வு காணுங்கால்,

$$\sin\theta = -\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \text{ ஆம்.}$$

18° குறுங்கோணமாதலின், $\sin\theta$ தனராசியாகவே இருத்தல் அவசியமாகின்றது.

$$\therefore \qquad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$$

$$\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\therefore \qquad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^\circ$$

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^\circ$$

6. கழித்தல் சூத்திரங்கள் (Subtraction Formulae)

அங்கம் 1ல் பெற்ற பலன்களில் $B = -B$ என்று இடுக.

அப்பொழுது $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

எனக் கிடைக்கப் பெறுகின்றோம்.

கிளை 1 :

$\sin(A-B)$, $\cos(A-B)$ என்பவற்றின் விரிப்புக்களிலிருந்து $\tan(A-B)$ஐ வருவிக்க.

கிளை 2 :

$$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B+1}{\cot B-\cot A}$$ என்று வருவிக்க.

கிளை 3 :

15°ன் கோணத் தகவுகள் :

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

இவ்விதமே,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ என்றும், $$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

என்றும் அறியலாம்.

$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$; $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$ என்பவற்றை நோக்குக. நிரப்புக் கோணங்களின் சூத்திரங்களிலிருந்து இவ்வகை அமையத் தக்கதேயாகும்.

கிளை 4 :

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$
$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 B - \sin^2 A$$
$$\sin(A+B)\sin(A-B)$$
$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$
$$= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$$
$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$$
$$= \sin^2 A - \sin^2 B.$$

இவ்வாறே

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 B - \sin^2 A$ எனக் காண்க.

7. கூட்டல், பெருக்கல் சூத்திரங்கள் (Sum and pooduct formulae)

அங்கங்கள் 1, 6 களில் கண்ட சூத்திரங்களிலிருந்து உண்மையாகவே விரித்தல், சுருக்கல் வகைகளால் பின்வருவனவற்றை எளிதில் காணலாம்.

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \quad (1)$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \quad (2)$$
$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \quad (3)$$
$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B \quad (4)$$

இச்சூத்திரங்களை இடமிருந்து வலம் நோக்கிப் படிக்குங்காலத்தில் சிறிது அமைப்பு வேறுபாடு செய்து நினைவில் வைத்துக் கொள்ளலாம் :

$A+B=C$; $A-B=D$ என்று பிரதியிட்டால்

$A=\dfrac{C+D}{2}$ யும் ; $B=\dfrac{C-D}{2}$ யும் ஆகும்

இப்பிரதியீடுகளைச் செய்தலால், நாம் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பெறுகின்றோம் :

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \text{I}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \text{II}$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \text{III}$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad \text{IV}$$

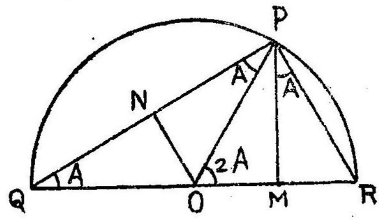
ஆனால், அவற்றை அவையுள்ளவாறே கொண்டு வலமிருந்து இடம் நோக்கிப் படிக்கையில்

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$
$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$
$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

என நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

இந்த அத்தியாயத்தில் வருவித்த சூத்திரங்களுக்கு வடிவ கணித நிரூபணங்களையிங்கு இணைத்திருப்பதனைக்காண்க.

I. 2Aன் திரிகோணத் தகவுகள்:



$\angle POR = 2A$ என்க.

O வை மையமாகக் கொண்டு ஓரலகு ஆரமுடைய வட்டத்தைக் கோணத்தின் கரங்களை P, R என்னுமிடத்தில் வெட்டிச் செல்லுமாறும், RO ஐ நீட்டியவிடத்து அதனை மறுபடியும் Q என்னுமிடத்தில் வெட்டுமாறும் வரைக. PQ, PRகளைச் சேர்க்க. QRக்கு நேர்ச் செங்குத்தாக PMஐ வரைக. O என்னும் மையத்திலிருந்து ONஐ PQக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

அப்பொழுது, $\angle Q = \angle OPQ$ (OP = OQ = வட்டத்தின் ஆரமாதலின்)
மேலும், $\angle Q + \angle OPQ =$ வெளிப்புற $\angle POR = 2A$

$$\therefore \quad \angle Q = \angle OPQ = \angle A$$

POQ என்னும் இரு சமபக்க முக்கோணத்தில் அச்சமபக்கங்கள் கூடுமிடமாகிய O என்னும் உச்சியிலிருந்து எதிர்பக்கத்திற்குச் செல்லும் செங்குத்துக் கோடாக ON இருத்தலால், N என்பது PQன் நடுப் புள்ளியாகும்.

$$\therefore \quad PQ = 2QN = 2OQ \cos A = 2 \cos A \quad \text{(i)}$$

(வரைதல் முறையில் ஆரம் ஓரலகாகக் கொள்ளப்பட்டதால்)
PR = 2ON (ஏதேனு மிருபக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை யிணைக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்தில் பாதியாயும் அதற்குச் சமாந்தரமாயும் நிற்றலால்)

$$= 2OQ \sin A = 2 \sin A \text{ (OQ ஆரம் = 1 ஓரலகு)}$$

மேலும்,

$$\angle MPR = 90° - \angle MPQ = \angle MQP = \angle A$$

$$\therefore \quad \sin 2A = \frac{MP}{OP} = MP \quad (OP = \text{ஆரம்} = 1 \text{ அலகாதலின்})$$

$$= PQ \sin A \quad \left[\because \frac{MP}{PQ} = \sin A \text{ ஆதலின்}\right]$$

$$= 2 \cos A \sin A \qquad [(i) \text{ காண்க}]$$

இனி,

$$\cos 2A = \frac{OM}{OP} = OM = QM - QO = QM - 1$$

$$= PQ \cos A - 1 = 2 \cos^2 A - 1$$

இதனோடு

$$\cos 2A = \frac{OM}{OP} = OM = OR - MR = 1 - MR$$

$$= 1 - PR \sin A = 1 - 2 \sin^2 A$$

மறுபடியும்,

$$\cos 2A = \frac{OM}{OP} = OM = \frac{QM - MR}{2}$$

$$= \frac{PQ \cos A - PR \sin A}{2} = \frac{2 \cos^2 A - 2 \sin^2 A}{2}$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\text{(iii)} \quad \tan 2A = \frac{MP}{OM} = \frac{2MP}{2OM} = \frac{2MP}{QM - MR} = \frac{\frac{2MP}{QM}}{1 - \frac{MR}{QM}}$$

$$= \frac{\frac{2MP}{QM}}{1 - \frac{MR}{MP} \cdot \frac{MP}{QM}} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan A \tan A},$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

$$\text{(iv)} \quad \sin 2A = \frac{MP}{OP} = \frac{2MP}{2OP} = \frac{2MP}{QR} = \frac{2MP}{QM + MR}$$

$$= \frac{\frac{2MP}{QM}}{1+\frac{MR}{QM}} = \frac{\frac{2MP}{QM}}{1+\frac{MR}{MP}\cdot\frac{MP}{QM}}$$

$$= \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$$

(v) $\cos 2A = \frac{OM}{OP} = \frac{2OM}{OP} = \frac{2OM}{QR} = \frac{QM-MR}{QM+MR}$

$$= \frac{1-\frac{MR}{QM}}{1+\frac{MR}{QM}} = \frac{1-\frac{MR}{MP}\cdot\frac{MP}{QM}}{1+\frac{MR}{MP}\cdot\frac{MP}{QM}}$$

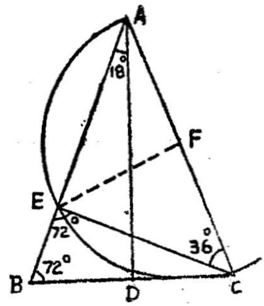
$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(vi) வடிவ கணிதமுறையில் $\cot A - \tan A = 2 \cot 2A$ என்று நிரூபித்தல்

$$2 \cot 2A = 2\frac{OM}{MP} = \frac{QM-MR}{MP} = \frac{QM}{MP} - \frac{MR}{MP}$$

$$= \cot A - \tan A$$

II. sin 18° ; cos 36° களின் மதிப்பை வடிவக் கணித முறையால் வருவித்தல் :



ABC என்னும் இரு சமபக்க முக்கோணத்தில் $\angle A=36^\circ$யும் ஏனைய $\angle B$, $\angle C$ என்னுங் கோணங்கள் தனித்தனியாக 72°யும் இருக்குமாறு கொள்க.

$AB=AC=$ஓரலகு என்க. $\angle B$யின் உள் சமவெட்டியாக ADஐ வரைக. அப்பொழுது $\angle BAD=18^\circ$ ஆகும். AD ஆனது BCயின் நேர்க்குத்துச் சமவெட்டியாகும்.

$\therefore \quad \sin 18^\circ=\dfrac{BD}{AB}=BD$ ($\because$ AB ஓரலகு ஆதலின்)

$$=\frac{BC}{2}$$

இனி, BCஐ C என்னுமிடத்தில் நீண்டிக்கொண்டு Aயின் வழியாகச் செல்லுமாறு ஒரு வட்டத்தை வரைக. அது ABயை E என்னுமிடத்தில் ஊடறுத்துச் செல்லுவதாகுக. CE ஐச் சேர்.

இப்பொழுது, $\angle BCE$ $\angle EAC=36^\circ$ $\angle BCE=\angle EAC=36^\circ$(ஒன்றுவிட்ட வட்டப் பகுதியிலுள்ளது)

$\therefore \quad \angle ECA=\angle BCA-\angle BCE=72^\circ-36^\circ=36^\circ$

$\therefore \quad AE=EC$

மேலும், $\angle BEC=\angle EAC+\angle ECA=36^\circ+36^\circ=72^\circ$

$\therefore \quad EC=BC$

$\therefore \quad AE=EC=BC=x$ என்க.

AEC என்னும் வட்டத்திற்கு BC ஆனது தொடுகோடு (tangent) ஆதலின், நாம் $BC^2=BE.BA=BE$ ($\because AB=1$) எனப் பெறுகின்றோம்.

அஃதாவது, $BC^2=AB-AE$

$$x^2=1-x$$

$$x^2+x-1=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin 18^\circ=\frac{BC}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\sin 18^\circ$ ஒரு குறுங்கோணமாதலின், $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ என்னுந் தனராசி மதிப்பொன்றே கொள்ளத்தக்கதாகும்.

$\therefore \quad \sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ஆகும்.

cos **36°**ஐப் பெறுதல்.

EFஐ ACக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

அப்பொழுது F ஆனது ACயின் நடுப்புள்ளியாகும்.

$$\text{ஆகவே, } \cos 36^\circ = \frac{CF}{EC} = \frac{2CF}{2CE} = \frac{AC}{2x} = \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

III. (A—B)ன் திரிகோணத் தகவுகள்

$\angle XOY = A$யும், $\angle YOZ = B$யும் ஆகவும், அதனால் $\angle XOZ = A-B$ ஆகவுங் கொள்க.

OZன்மேல் யாதேனுமொரு புள்ளி Pஐ யெடுத்து, அங்கிருந்து OX, OYகளுக்கு முறையே PM, PN என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

N என்னுமிடத்திலிருந்து OX, MPயின் நீட்டம் என்பவற்றிற்கு முறையே NQ, NR என்னும் செங்குத்துக்கோடுகளை வரைக.

இப்பொழுது, PNOM என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம் (cyclic quadrilateral) ஆகும்.

ஆக்வே, வெளிப்புற $\angle RPN =$ உள்ளெதிர் $\angle MON = \angle A$.

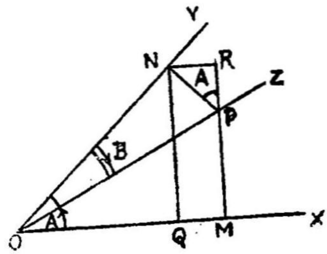
இனி,

$$\text{(i) } \sin(A-B) = \sin \angle POM = \frac{MP}{OP} = \frac{MR-PR}{OP} = \frac{QN-PR}{OP}$$

$$= \frac{QN}{OP} - \frac{PR}{OP}.$$

$$\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP} - \frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \cos B = \cos A \sin B.$$



(ii) $\cos(A-B) = \cos\angle POM$

$$= \frac{OM}{OP} = \frac{OQ+QM}{OP}$$

$$= \frac{OQ+NR}{OP} = \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP}$$

$$\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP} + \frac{NR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

(iii) $\tan(A-B) = \tan\angle POM = \frac{MP}{OM} = \frac{MR-PR}{OQ+QM}$

$$= \frac{QN-PR}{OQ+NR} = \frac{\frac{QN}{OQ} - \frac{PR}{OQ}}{1+\frac{NR}{OQ}}$$

(பகுதி விகுதிகளிரண்டையும் OQ ஆல் வகுக்க)

$$= \frac{\frac{QN}{OQ} - \frac{PR}{OQ}}{1+\frac{NR}{PR}\cdot\frac{PR}{OQ}} = \frac{\tan A - \frac{PR}{OQ}}{1 + \tan A\cdot\frac{PR}{OQ}}$$

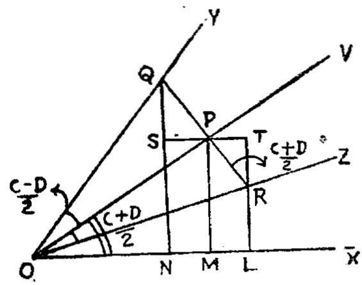
இப்பொழுது $\frac{PR}{OQ} = \frac{PN}{ON}$ (PNR, OQN என்னும் சருவசமய முக்கோணங்களிலிருந்து)

$$= \tan B \text{ ஆம்.}$$

$\therefore$ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$ ஆகும்.

IV. கூட்டல், பெருக்கல் சூத்திரங்களை வடிவக்கணித முறையால் நிரூபித்தல் :

$\angle XOY = C$; $\angle XOZ = D$ அவைபற்றி $\angle ZOY = C - D$ ஆகுக.



$\angle ZOY$ஐ இரு சமமாக அறுக்குமாறு OVஐ வரைக. OVயின் மேல் ஏதேனுமொரு புள்ளி Pயை யெடுத்து அங்கு OVஐ நேர்ச்செங் குத்தாகக் குறுக்கிட்டுச் செல்லுங் கோடொன்றை வரைந்து. அது OY, OZகளை வெட்டுமிடங்களை முறையே Q, R எனக் குறிக்க. பிறகு, P, Q, R என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து OXக்கு PM, QN, RL என்னுஞ் செங்குத்துக்கோடுகளை வரைக. Pயின் வழியாக OXக்குச் சமாந்தர மாகவும், QN, RL நீட்டங்களை S, T என்னும் இடங்களில் கூடுவதாக வும் ஒரு குறுக்குக் கோட்டை வரைக.

இப்பொழுது, ZOV, VOY என்னுங் கோணங்களில் ஒவ்வொன் றும் $\frac{C-D}{2}$க்குச் சமமாகும் (OV ஆனது $\angle ZOY$ன் உள் சமவெட்டி யாதலால்)

$$\angle XOV = \angle XOZ + \angle ZOV = D + \frac{C-D}{2} = \frac{C+D}{2} \text{ ஆம்.}$$

மேலும், $\angle PRT =$ உள்ளெதிர் கோணம் $\angle LOP$(POLR என்னும் வட்டம் நாற்கரத்திற்குரியது.)

$$= \frac{C+D}{2}$$

Δ^sPOQ, POR என்பன முழுவொப்பு (Congruent) உடையன வாகும்.

OQ=OR; PQ = PR ஆம். ஆகவே, QR=2PR ஆம்.

∴ NQ, MP, LR என்பன இணை (Parallel) கோடுகளாகும். QP, PR என்னும் குறுக்கிடுவெட்டுப் பகுதிகளும் சமமாகும்.

∴ SP=PTயும், NM=MLம் ஆம்.

∴ NL=2ML=2PT

மேலும், $\left.\begin{array}{l} ON+OL=2OM \\ NQ+LR=2MP \end{array}\right\}$ ஆகும்.

எனவே,

(i) $$\sin C+\sin D=\frac{NQ}{OQ}+\frac{LR}{OR}=\frac{NQ}{OR}+\frac{LR}{OR}=\frac{NQ+LR}{OR}$$

$$=\frac{2MP}{OR}=\frac{2MP}{OP}\cdot\frac{OP}{OR}$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

(ii) $$\sin C-\sin D=\frac{NQ}{OQ}-\frac{LR}{OR}=\frac{NQ}{OR}-\frac{LR}{OR}=\frac{NQ-LR}{OR}$$

$$=\frac{(NQ-MP)+(MP-LR)}{OR}=\frac{SQ+RT}{OR}$$

$$=\frac{2RT}{OR}=\frac{2RT}{RP}\cdot\frac{RP}{OR}$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

(iii) $$\cos C+\cos D=\frac{ON}{OQ}+\frac{OL}{OR}=\frac{ON}{OR}+\frac{OL}{OR}=\frac{ON+OL}{OR}$$

$$=\frac{2OM}{OR}=\frac{2OM}{OP}\cdot\frac{OP}{OR}$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

(iv) $$\cos C-\cos D=\frac{ON}{OQ}-\frac{OL}{OR}=\frac{ON}{OR}-\frac{OL}{OR}=\frac{ON-OL}{OR}$$

$$= -\frac{OL-ON}{OR} = -\frac{NL}{OR} = -2\frac{ML}{OR}$$

$$= -2\frac{PT}{OR} = -2\frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OR}$$

$$= -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $\sin Q = \dfrac{\sin 3Q}{1+2\cos 2Q}$ என்று நிரூபித்து இதைக்கொண்டு $\sin 15°$ ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

விடை :

$$\frac{\sin 3Q}{1+2\cos 2Q} = \frac{3\sin Q - 4\sin^3 Q}{1+2(1-2\sin^2 Q)}$$

$$= \frac{(3-4\sin^2 Q)\sin Q}{(3-4\sin^2 Q)} = \sin Q.$$

இப்பலனில், $Q = 15°$ என்றிடுக. அப்பொழுது

$$\sin 15° = \frac{\sin 45°}{1+2\cos 30°} = \frac{1/\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

2. $\sin A = \frac{3}{5}$; $\cos B = \frac{12}{13}$ ஆனால், A, B என்பன குறுங்கோணங்களாகிய வழி $\tan(A-B)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

விடை :

$$\sin A = \frac{3}{5}; \quad \therefore \quad \cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}$$

$= \pm\frac{4}{5}$ A என்பது குறுங்கோணமெனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்

$\cos A = \frac{4}{5}$ எனத் தனராசித் தகவையே கொள்ளுவோம்.

$\therefore \tan A = \frac{3}{4}$ ஆம்.

$\cos B = \frac{12}{13}$ ஆதலின்,

$$\sin B = \pm\sqrt{1-\cos^2 B} = \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

B குறுங்கோணமாதலின், $\sin B = \frac{5}{13}$ எனத் தனராசியே கொள்ளுவோம். $\therefore \tan B = \frac{5}{12}$

இப்பொழுது,

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}} = \frac{16}{63}$$

$$\therefore \quad \tan(A-B) = \frac{16}{63}.$$

3. அட்டவணையை யுபயோகிக்காமல்

$\sin 78° - \sin 18° + \cos 132° = 0$ என்று நிரூபி.

விடை :

$$\sin 78° - \sin 18° + \cos(180° - 48°)$$

$$= 2\cos\frac{78°+18°}{2}\sin\frac{78°-18°}{2} - \cos 48°$$

$$= 2\cos 48° \sin 30° - \cos 48°$$

$$= \cos 48° (2\sin 30 - 1)$$

$$= \cos 48° (2 \times \tfrac{1}{2} - 1) = \cos 48° \times 0 = 0$$

$$\therefore \quad \sin 78° - \sin 18° + \cos 132° = 0$$

4. $\cos A + \cos(A+120°) + \cos(A+240°) = 0$ ஆகுமென்று என நிரூபிக்க.

விடை :

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ என்பது சூத்திரமாதலின்,

அதையிங்கு உபயோகிக்க,

$\cos(240^\circ+A)+\cos(120^\circ+A)$

$=2\cos\frac{360^\circ+2A}{2}\cos\frac{120^\circ}{2}$

$=2\cos(180+A)\cos 60^\circ=2\cos 60\,(-\cos A)=-2\cos 60\cos A$

$=-2\times\frac{1}{2}\cos A=-\cos A$

$\therefore\quad \cos A+\cos(A+120)+\cos(A+240)=\cos A-\cos A=0$

5. $\triangle ABC$ என்னும் யாதொரு முக்கோணத்திலும் $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ என நிரூபிக்க.

ஒரு முக்கோணத்தில் $A+B+C=180^\circ$ ஆதலின்

$A+B=(180-C)$ ஆம்.

$\therefore\quad \tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C$ ஆம்.

ஆனால் $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ஆம்

$\therefore\quad \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

அல்லது $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ ஆம்.

6. $A+B+C=180^\circ$ ஆனால்,

$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ என நிரூபிக்க.

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\sin\frac{(A+B)}{2}=\sin\left((90-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$$

என்பனவற்றை அறிவோம்.

$$\therefore\quad \sin A+\sin B-\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\left(90-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

7. $\sin^2A+\sin^2B-\cos^2C=1+2\quad\cos A\cos B\cos C$ என நிரூபிக்க.

இடப்பக்கம் $=\frac{1}{2}[2\sin^2A+2\sin^2B-2\cos^2C]$

$$=\tfrac{1}{2}[(1-\cos 2A)+(1-\cos 2B)-(1+2\cos 2C)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[1-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)]$$

இப்பொழுது, $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2C-1$$

$$=2\cos(180-C)\cos(A-B)+2\cos^2C-1$$

$$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2C-1$$

$$=-1-2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]$$

$$=-1-2\cos C[\cos(A-B)-\cos(180^\circ-\overline{A+B})]$$

$$=-1-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$=-1-2\cos C[2\cos A\cos B]$$

$$=-1-4\cos A\cos B\cos C$$

∴ இடப்பக்கம் $=\frac{1}{2}[1-(-1-4\cos A\cos B\cos C)]$

$=\frac{1}{2}[1+1+4\cos A\cos B\cos C]$

$=1+2\cos A\cos B\cos C$

= வலப்பக்கத்திலுள்ளனவாம்.

பயிற்சி 5·1

(A+B) ன் தகவுகள்

1\. (i) $\tan\alpha=\sqrt{3}$; $\tan\beta=1$ ஆனால் $\sin(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ க்களின் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$]

(ii) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$; $\cos\beta=\frac{12}{13}$ எனின், $\sin(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha+\beta)$; $\tan(\alpha+\beta)$ என்பவற்றை மதிப்பிடுக.

[விடை : $\frac{220}{221}$; $\frac{21}{221}$; $\frac{220}{21}$]

2\. நிரூபி :

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

3\. (i) $A+B=45^\circ$ ஆனால், $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ என்று நிரூபி. இதைக்கொண்டு $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : $\sqrt{2}-1$]

(ii) $A+B=45^\circ$ என்றால், $(\cot A-1)(\cot B-1)=2$ என்று நிரூபி.

4\. (i) $\tan\alpha=\frac{5}{6}$; $\tan\beta=\frac{1}{11}$ என்றால், $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ என்று நிரூபி.

(ii) $\tan A=\frac{n}{n+1}$, $\tan\beta=\frac{1}{2n+1}$ என்றால், $A+B=\frac{\pi}{4}$ என்று நிரூபி.

5. நிரூபி.

(i) $\cos(45°-A)\cos(45°-B)-\sin(45°-A)\sin(45°-B)=\sin(A+B)$

(ii) $\sin(45°+A)\cos(45°-B)+\cos(45°+A)\sin(45°-B)=\cos(A-B)$

(iii) $\cos(60°+A)\cos(30°-A)-\sin(60°+A)\sin(30°-A)=0.$

6. $A+B+C=180°$ ஆகுமிடத்துப் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

(ii) $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A.\tan 2B.\tan 2C$

(iii) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

(iv) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

7. A, B, C குறுங்கோணங்களாகவும், $\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan B=\frac{1}{5}$; $\tan C=\frac{1}{8}$ம் ஆனால் $A+B+C=\frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 5.2

[$2A, \frac{A}{2}$, 3A ன் தகவுகள்]

1. (i) $\sin A=\cdot 8$ ஆனால் $\tan\frac{A}{2}$ ஐக் காண்க : அன்றியும், 2A, 3A க்களின் எல்லா விகிதங்களுக்கும் மதிப்பறிக.

(ii) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ ம், α குறுங்கோணமும் ஆனால், $\tan\frac{\alpha}{2}$ $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை யறிக.

(iii) $\tan\alpha=\frac{1}{3}$; $\tan\beta=\frac{1}{7}$ ஆனால், $\tan(2\alpha+\beta)$வை யறிக.

[விடை: 1]

(iv) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ ஆனால், $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ களைக் கண்டறிக.

[விடை: $\frac{1}{?}$, $\frac{1}{?}$]

(v) $\sin A=\cdot4$, $\sin B=\cdot5$ என்றால், $\tan(2A+B)\approx4\cdot4$ என்று காட்டுக.

2. (i) காட்டுக: $4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40)=3\cos(20^\circ+\cos 40^\circ)$

(ii) நிரூபி: $\sin\theta=\frac{\sin 3\theta}{1+2\cos 2\theta}$, இதைக்கொண்டு $\sin 15^\circ$ன் மதிப்பைக் காண்க.

$\left[\text{விடை}: \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

3. காட்டுக: $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta$

4. $\tan A=\frac{1-\cos B}{\sin B}$ ஆனால், $\tan 2A=\tan B$ ஆகுமென்று நிரூபி.

5. நிரூபி: $\tan A=\frac{1-\cos 2A}{\sin 2A}$; இதையொட்டி $\tan 7\frac{1}{2}^\circ$, $\tan 15^\circ$, $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$, $\tan 82^\circ\ 30'$ என்பவற்றின் மதிப்பைக் கண்டறிக.

6. A ஆனது ஒரு குறுங்கோணமானால், $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$ என நிரூபித்து, $\tan 22\frac{1}{4}^\circ$ன் மதிப்பையறிக.

[விடை: $\sqrt{2}-1$]

7. $\tan\frac{A}{2}=t$ ஆனால், $\sin A+\tan A=\frac{4t}{1-t^4}$ என்று நிரூபி.

8. $\cos\theta$, $\sin 2\theta$க்களை $\tan\theta$ வைச் சார்த்திக் கூறுக. பின் $\frac{3+\cos 4\theta}{1-\cos 4\theta}=\frac{1}{2}(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$ என்று நிரூபி.

9. $\tan^2 A = 2 + 3\tan^2 B$ ஆனால், $\cos 2B = 2 + 3\cos 2A$ என்று நிருபி.

10. நிரூபிக்க: $\cos^8 A - \sin^8 A = \cos 2A - \frac{1}{4}\sin 2A \sin 4A$

11. நிரூபிக்க: $\tan\left(45° + \frac{A}{2}\right) = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

12. காண்க:

(i) $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$.

(ii) நிரூபிக்க:

$\tan 3A + \tan A - \tan 4A + \tan A \tan 3A \tan 4A = 0$.

13. (a) நிரூபிக்க: $\cot\theta - \operatorname{cosec} 2\theta = \cot 2\theta$

ஆகவே, (i) $\cot\theta - \operatorname{cosec} 2\theta - \operatorname{cosec} 4\theta = \cot 4\theta$ என்றும்

(ii) $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{8} = \cot\frac{\pi}{16}$ என்றும் நிருபி.

(b) $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$ என்று நிருபி.

ஆகவே, $\cot\theta - \tan\theta - 2\tan 2\theta = 4\cot 4\theta$ என்று நிருபி.

14. $\cos 5A$, $\cos 6A$ க்களை $\cos A$ ன் அடுக்குகளாகக் கூறுக.

15. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ஆனால், $a\sin 2\theta + b\cos 2\theta$ ன் மதிப்பறிக.

[விடை: b]

16. நிருபி:

$$16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$$

17. $\frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$

18. $\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$.

19. $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} - \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = 2\tan 2A$

20. $\dfrac{\tan 5\theta + \tan 3\theta}{\tan 5\theta - \tan 3\theta} = 4 \cos 2\theta . \cos 4\theta$

21. $\cos A = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2A}{2}}$; $\sin A = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2A}{2}}$

எனக் காட்டுக.

நிரூபிக்க ;

(i) $\cos^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$

(ii) $\sin^4 \dfrac{\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{3} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$

22. $(2m-1) \cos 2\theta + (m+2) \sin 2\theta = 2m+1$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து $\tan \theta$ வைக் கண்டறிக.

[விடை : $\dfrac{1}{2}$ (அ) $\dfrac{1}{n}$]

23. $\tan 3\theta = \dfrac{3 \tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ என்னும் முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி $3x - x^3 = 3{\cdot}732(1-3x^2)$ ஐ விடுவிக்க.

24. அட்டவணையில் உதவியால் $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{2}{3}$ க்குப் பொருந்துவதாகும் x என்னும் குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

25. $\dfrac{\tan^2\theta - \tan^2\alpha}{1 - \tan^2\theta \tan^2\alpha} = n$ எனின், $\cos 2\theta = \dfrac{1-n}{1+n} \cos 2\alpha$

என்று நிரூபி.

26. $\cos^6\theta - \sin^6\theta = \frac{1}{4}(\cos^3 2\theta + 3 \cos 2\theta)$ என்று நிரூபி.

27. $1 + \cos^2 2\theta = 2(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$ என்று நிரூபி.

பயிற்சி 5·3

[18°, 36° களின் தகவுகள்]

1. நிரூபிக்க : $4 \sin 18° \cos 36° = 1$

2. மதிப்பறிக: $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ$

[விடை: $\frac{3}{4}$]

3. மதிப்பறிக: $\sec 72^\circ - \sec 36^\circ$

[விடை: 2]

4. நிருபிக்க: $\sin 36^\circ \sin 72'' \sin 108^\circ \sin 144^\circ = \frac{5}{16}$.

5. நிருபிக்க: $\cos^2 48 - \sin^2 12 = \frac{(\sqrt{5}+1)}{8}$

6. ஒழுங்கான ஐங்கோண அறுகோண தசகோண வுருவங்கள் ஒரு வட்டத்தினுள் அமையுங்கால், ஐங்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது ஏனையவிரண்டினுள் ஒவ்வொன்றின் ஒருபக்க வர்க்கத்தின் கூட்டுப் பலனகுமெனக் கண்டறிக.

பயிற்சி 5·4

[(A—B)யின் தகவுகள்]

1. நிருபி: $\sin(n+1)A \sin(n-1)A + \cos(n+1)A \cos(n-1)A = \cos 2A$

2. நிருபி: $\Sigma \cos A \sin(B-C) = 0$

3. நிருபி: $$\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} = 0$$

4. நிருபி: $(\sin 3A + \sin A)\sin A + (\cos 3A - \cos A)\cos A = 0$

5. நிருபி: $$\frac{\sin(A+B) + \cos(A-B)}{\sin(A-B) + \cos(A+B)} = \frac{\cos B + \sin B}{\cos B - \sin B}$$

6. நிருபி: $$\frac{\cot A + \cot B}{\cot A - \cot B} = \frac{\sin(B+A)}{\sin(B-A)}$$

7. $\tan(A+B) = \alpha$, $\tan(A-B) = \beta$ ஆனல், α, β க்களொடு சார்த்தி $\tan 2\beta$ வைக் கண்டறிக.

8. நிருபி: $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \cos(\beta+\gamma)\cos\alpha = \sin\beta \sin(\gamma-\alpha)$

9. (a) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$; $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ஆனுல்,

(i) $\cos(\alpha-\beta)$; (ii) $\tan(\alpha-\beta)$; (iii) $\tan(2\alpha-\beta)$

(iv) $\sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$ (v) $\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்புக்

களை யறிக.

(a) $\tan A = \frac{18}{17}$, $\tan B = \frac{1}{35}$ எனில், $A-B=45°$ என நிரூபி.

10. நிரூபிக்க:

(i) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$

(ii) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{(\alpha-\beta)}{2}$

(iii) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$

(iv) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2 \frac{(\alpha+\beta)}{2}$

12. நிரூபிக்க: $\cot (A+15°) - \tan (A+15°) = \frac{4 \cos 2A}{2 \sin A + 1}$

11. நிரூபிக்க:

(i) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

(ii) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$

(iii) $\sin \alpha \sin (60°-\alpha) \sin (60°+\alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$

(iv) $\sin A \sin (60°+A) \sin (120°+A) = \frac{1}{4} \sin 3A$

(v) $\cos \alpha \cos (60°-\alpha) \cos (60°+\alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

(vi) $\tan A + \tan (60°+A) + \tan (120°+A) = 3 \tan 3A$

(vii) $\cot \alpha + \cot (60°+\alpha) - \cot (60°-\alpha) = 3 \cot 3\alpha$.

பயிற்சி 5.5

(கூட்டல், பெருக்கல் சூத்திரங்கள்)

1. நிரூபி: $\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$

2. நிரூபி:

$$\frac{\sin(A+B+C)+\sin(-A+B+C)-\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C)}{\cos(A+B+C)+\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C)}=\tan B$$

3. நிரூபிக்க:

(i) $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ=0$

(ii) $\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ=0$

(iii) $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0$

(iv) $\sin 78^\circ-\sin 18^\circ+\cos 132^\circ=0$

(v) $\cos 12^\circ-\cos 24^\circ-\cos 48^\circ+\cos 60^\circ+\cos 84^\circ=0$

(vi) $\cos 35^\circ+\cos 85^\circ+\cos 155^\circ=0$

(vii) $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ-\sin 70^\circ=0$

(viii) $4\cos 18^\circ\cos 42^\circ\cos 78^\circ=\cos 54^\circ$

(ix) $\cos 12^\circ+\cos 84^\circ+\cos 132^\circ+\cos 156^\circ=-\frac{1}{2}$

(x) $4(\sin 24^\circ+\cos 6^\circ)=3\sqrt{3}+\sqrt{15}$

(xi) $\cos^2 76^\circ+\cos^2 16^\circ-\cos 76^\circ\cos 16^\circ=\frac{3}{4}$

(xii) $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1$

(xiii) $\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ=\frac{1}{16}$

(xiv) $\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ=\frac{1}{16}$

4. நிரூபிக்க:

(i) $\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{11\theta}{2}=\sin 2\theta\sin 5\theta$

(ii) $\cos 2\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos 3\theta\cos\frac{9\theta}{2}=\sin 5\theta.\sin\frac{5\theta}{2}$

(iii) $\sin 3A+\sin 2A-\sin A=4\sin A.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{3A}{2}$.

(iv) $$\frac{\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta+\sin 4\theta\sin 13\theta}{\sin\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta+\sin 4\theta\cos 13\theta}=\tan 9\theta$$

(v) $\dfrac{\cos 2\alpha \cos 3\alpha - \cos 2\alpha \cos 7\alpha + \cos\alpha \cos 10\alpha}{\sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 5\alpha + \sin 4\alpha \sin 7\alpha}$
$= \cot 6\alpha \cot 5\alpha$

(vi) $\dfrac{2 \sin (A-C) \cos C - \sin (A-2C)}{2 \sin (B-C) \cos C - \sin (B-2C)} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$

(vii) $\Sigma \cos A \sin (B-C) = 0$

(viii) $\sin (\beta-\gamma) \cos (\alpha-\delta) + \sin (\gamma-\alpha) \cos (\beta-\delta)$
$+ \sin (\alpha-\beta) \cos (\gamma-\delta) = 0$

(ix) $\cos (36°-A) \cos (36°+A) + \cos (54°+A) \cos(54°-A)$
$= \cos 2A.$

5. (i) $4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ வை 4 cosine களின் கூட்டுப்பலனுகக் கூறுக.

(ii) $4 \cos A \sin B \sin C$ ஐ 4 cosine களின் கூட்டுப்பலனுகக் காட்டுக.

6. காட்டுக :

(i) $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$
$= 4 \sin \dfrac{(B+C)}{2} \sin \dfrac{(C+A)}{2} \sin \dfrac{(A+B)}{2}$

(ii) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos (A+B+C)$
$= 4 \cos \dfrac{B+C}{2} \cos \dfrac{C+A}{2} \cos \dfrac{A+B}{2}$

(iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + \cos 2(A+B+C)$
$= 4 \cos(A+B) \cos (B+C) \cos (C+A)$

7. நிருபிக்க :

(i) $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right) = 0$

(ii) $\sin \alpha + \sin (120 + \alpha) - \sin (120 - \alpha) = 0$

(iii) $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

(iv) $\cos^2(45^\circ-\alpha)+\cos^2(15^\circ+\alpha)-\cos^2(15^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}$

(v) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}$

(vi) $\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}$

8. நிரூபி : $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)$
$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$

9. நிரூபி :

(i) $\sin\theta(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cos 8\theta)=\sin 4\theta\cos 5\theta$

(ii) $\sin 5x+\sin 3x=8\sin^2 x-24\sin^3 x+16\sin^5 x$

10. நிரூபி :

(i) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

(ii) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

(iii) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

(iv) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}$

11. $A+B+C=180^\circ$ ஆனால், நிரூபிக்க :

(i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(iv) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

(v) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

(vi) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C = 1-2\cos A\cos B\cos C$

(vii) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(viii) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(ix) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

(x) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

12. $A+B+C=180^\circ$ ஆனால், நிரூபிக்க

(i) $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(ii) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$

(iii) $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\sin C$

(iv) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$

(v) $\sin^2 A+\sin^2 B-\cos^2 C=1+2\cos A\cos B\cos C$

(vi) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

(vii) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

13. ஒரு ABC என்னும் முக்கோணத்தில், பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(a) $\dfrac{\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C}=\dfrac{\tan B}{\tan C}$

(b) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

மற்றும் $\frac{1}{3}\sin 2A=\frac{1}{4}\sin 2B=\frac{1}{5}\sin 2C$ ஆனுல், (a), (b) களைப் பயன்படுத்தி $\tan A=3$, $\tan B=2$, $\tan C=1$ என்றும் காட்டுக.

14. காட்டுக :

$$(1-\sin\theta)(1-\sin\phi)=\left(\sin\frac{\theta+\phi}{2}-\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)^2$$

15. $\sin\theta=n\sin(\theta+2\alpha)$ ஆனுல், $\tan(\theta+\alpha)=\dfrac{1+n}{1-n}\tan\alpha$ என்று காட்டுக.

16. $\cos x+\cos y=a$; $\sin x+\sin y=b$ ஆனுல் $\sin(x+y)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ என்று நிரூபி. $\tan\dfrac{x-y}{2}$ ன் மதிப்பையுங் கண்டறிக.

17. A, B, C என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாகியவிடத்து $S=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$ என்பதனை மூன்று கோணத் தகவுகளின் பெருக்கற் பலனைக் கூறுக.

S=0 ஆனுல், முக்கோணத்தின் ஒரு கோணமானது 60° ஆகுமென்று காட்டுக.

VI. முக்கோணத்தின் பண்புகள்

(Properties of Triangles)

1. ABC என்னும் எந்த முக்கோணத்திலேனும் அதன் சுற்று வட்டத்தின் ஆரம் R என்பதானல்,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ ஆகும்.}$$

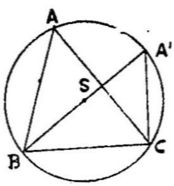


Fig 1

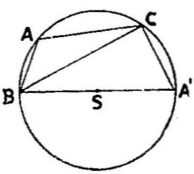
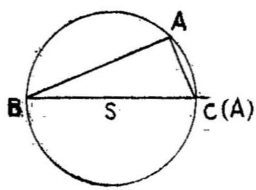


Fig 2



படம் 1ல் $\angle A$ குறுங்கோணமாகும்.

படம் 2ல் $\angle A$ விரிகோணமாகும்.

படம் 3ல் $\angle A$ செங்கோணமாகும்.

வரைவுமுறை அமைப்பு :

BA′ என்னும் விட்டத்தை வரைந்து, CA′ஐச் சேர்க்க.

அப்பொழுது இரண்டு படங்களிலும், ஒரு அரை வட்டத்தில் எதிர் கொள்ளும் கோணமாதலின், $\angle A'CB = 90^\circ$ ஆகும்.

படம் 1 ல், $\frac{BC}{BA'} = \sin A' = \sin A$

[ஒரே வட்டப் பகுதியிலுள்ள கோணங்களாதலின் $\angle A = \angle A'$]

படம் 2 ல், $\frac{BC}{BA'} = \sin A' = \sin(\pi - A) = \sin A$

[A'BAC என்பது ஒருவ்ட்ட நாற்கோட்டு (cyclic quadrilateral) உருவமாதலின்]

$\therefore$ இரண்டு படங்களிலும், $BC = BA' \sin A$

அஃதாவது $a = 2R \sin A$ [BA' = விட்டம் = 2R ஆதலின்]

இவ்வாறே, $b = 2R \sin B$ யும், $C = 2R \sin C$ யும் ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\text{in } B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

படம் 3ல் கண்டபடி $\angle A$ செங்கோணமாகும்பொழுது, BC ஆனது சுற்றுவட்டத்தின் விட்டமாகும். ஆகவே,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = a = 2R.$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{AC}{\frac{AC}{BC}} = BC = 2R$$

இஃதேபோல், $\frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. யாதொரு முக்கோணத்திலும் $a = b \cos C + c \cos B$ என்று நிருபிக்க :

படம் 1ல் $\angle C$, குறுங்கோணமும்

படம் 2ல் $\angle C$, விரிகோணமும்

படம் 3ல் $\angle C$, நேர்க்கோணமுமாகும்.

முக்கோணத்தின் குத்துயரம் (Altitude) ஆக ADஐ வரைக.

படம் 1ல் $a=BD+DC$

இப்பொழுது $\frac{BD}{c}=\cos B$; $\frac{CD}{b}=\cos C$

$\therefore \quad BD=c\cos B$; $CD=b\cos C$

$\therefore \quad a=b\cos C+c\cos B$

படம் (ii) ல் $a=BD-CD=c\cos B-CD$

இப்பொழுது $\frac{CD}{b}=\cos(180-C)$

$\therefore \quad CD=b\cos(180-C)=-b\cos C$

$\therefore \quad a=c\cos B-(-b\cos C)=c\cos B+b\cos C$

படம் (iii) ல், $a=BC$; $\frac{BC}{c}=\cos B$ ஆம்.

$\therefore \quad BC=c\cos B.$

$\therefore \quad a=c\cos B+b\cos C$

[$\cos C=\cos 90°=0$ ஆதலின்]

$\therefore$ எல்லா வகைகளிலும் $a=b\cos C+c\cos B$ ஆதல் பெறப்படும்.

இவ்வாறே, $b=c\cos A+a\cos C$

$c=a\cos B+b\cos A$

ஆதல் வலியுறும்.

3. யாதொரு முக்கோணத்திலும் $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ஆகும்.

இரண்டாம் அங்கத்தில் படம் (1) ல் உள்ளபடி $\angle C$ குறுங்கோணமானல்

$c^2=AB^2=BD^2+AD^2$ [ABD என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்திலிருந்து]

$=(BC-DC)^2+AD^2$

$=BC^2-2BC \,.\, DC+DC^2+AD^2$

$=BC^2-2BC \,.\, CD+AC^2$ [CAD என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்திலிருந்து]

இப்பொழுது $\frac{DC}{b}=\cos C.$ $\therefore$ $DC=b \cos c$

$\therefore \quad c^2=BC^2-2BC \,.\, b\cos C+AC^2$

$=a^2-2ab\cos C+b^2$

$=a^2+b^2-2ab\cos C$

படம் (ii) ல் கண்டபடி $\angle C$, விரிகோணமாகும் பொழுது.

$c^2=AB^2=AD^2+CD^2$ [நேர்க்கோண $\triangle ABD$ யிலிருந்து]

$=(BC+CD)^2+AD^2$

$=BC^2+2BC \,.\, CD+CD^2+AD^2$

$=BC^2+2BC \,.\, CD+AC^2$

[ACD என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்திலிருந்து]

இப்பொழுது, $\frac{CD}{b}=\cos(180-C)=-\cos C$

$\therefore \quad CD=-b\cos C$

$\therefore \quad c^2=BC^2+2BC(-b\cos c)+AC^2$

$=a^2+2a(-b\cos c)+b^2$

$=a^2+b^2-2ab\cos C$

படம் (iii) ல் கண்டபடி, $\angle C$, நேர்க்கோணமாகும் பொழுது

$c^2=a^2+b^2$ (பிதாகோரஸ் தேற்றம்)

$=a^2+b^2-2ab\cos C$ [$\because \cos C=0$)

இவற்றால் எல்லா வகைகளிலும்,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ஆதல் காணப்படும்

இவ்வறே,

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ என்றும்

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ என்றும் B வருவிக்கலாம்.

4. (*a*) ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு $(\triangle)=\frac{1}{2}ab \sin C$.

படம் (i) ல் கண்டபடி $-C$ குறுங்கோணமானல்,

$\triangle ABC$ ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}BC \,.\, AD$

இப்பொழுது, $\frac{AD}{b}=\sin C$. $\therefore$ $AD=b \sin C$

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}BC \,.\, b \sin c=\frac{1}{2}ab \sin C$

படம் (ii) கண்டபடி $\angle C$. விரிகோணமானல்,

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\, BC\, AD$.

இப்பொழுது $\frac{AD}{b}=\sin \angle ACD=\sin (180-C)=\sin C$

$\therefore$ முன் போலவே $AD=b \sin C$

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}\, ab \sin c$

படம் (iii)ல் கண்டபடி $\angle C$, நேர்க்கோணமாகுக.

$\triangle ABC$ ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}\, BC.AC=\frac{1}{2}ab$.

$=\frac{1}{2}ab \sin C$ [$\because \sin C=\sin 90°=1$]

$\therefore$ எல்லா வகைகளிலும், $\triangle ABC$ ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}ab \sin C$ என்று கிடைக்கப் பெறுகின்ரேம்.

இப்பொழுது, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$\therefore$ $a \sin C=c \sin A$

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}ab \sin C=\frac{1}{2}b.a \sin C=\frac{1}{2}\, bc \sin A$

மேலும், $b \sin C=c \sin B$

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}\, ab \sin C=\frac{1}{2}\, a.c \sin B$

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}ab \sin C=\frac{1}{2}\, bc \sin A=\frac{1}{2}\, ca \sin B$

கிளை : $abc=4R\triangle$

$\triangle=\frac{1}{2}\, bc \sin A$ ம், $\sin A=\frac{a}{2R}$ ம் ஆகும்.

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}bc\, \frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$

4. (b) நிரூபி $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

விடை :

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b+c)(a-b+c)}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{2s.2(s-a).2(s-c).2(s-b)}$$

$$= \frac{4}{2bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$ ஆதலை ஈண்டு பயன்கொள்ள,

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(c) நிரூபி : $r = \frac{\Delta}{s}$; $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$; $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$; $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$

$r = \frac{\Delta}{s}$ என்றதனை நிரூபித்தல்.

ABC என்பதொரு முக்கோணம்.

அதன் உட்கோனங்களின் சமவெட்டிகளை வரைக. அவை I என்னும் புள்ளியிடத்தில் ஒருங்கு கூடும். அப்புள்ளியானதுஉள் வட்டத்தின் மையமாகும். அங்கிருந்து முப்பக்கங்களுக்கும் ID, IE, IF என்னும் செங்குத்துக்கோடுகளை வரைக.

அப்பொழுது ID = IE = IF = r (உள்வட்டத்தின் ஆரம்)

இனி, $\triangle$ABCன் பரப்பு

= $\triangle$BIC ன் பரப்பு + $\triangle$CIAன் பரப்பு + $\triangle$AIBன் பரப்பாகும்.

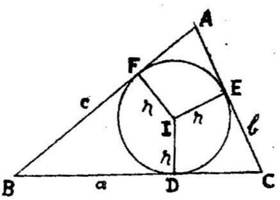
$=\frac{1}{2}BC.ID+\frac{1}{2}CA.IE+\frac{1}{2}AB.IF$

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$=\frac{1}{2}r.2s=r\cdot s$

$\therefore r\cdot s=\triangle$, அஃதாவது $r=\frac{\triangle}{s}$:



$r_1=\frac{\triangle}{s-a}$. என்றதனை நிரூபித்தல்:

AB, AC களை நீட்டி, B, C என்னும் கோணங்களின் வெளிச் சமவெட்டிகளை வரைக. அவை I_1 என்னுமிடத்தில் கூடுவனவாகுக. அப்பொழுது AI_1 ஆனது A என்னும் கோணத்தின் உள் சமவெட்டியாகும். முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு I_1D_1;I_1E_1;I_1F_1 என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

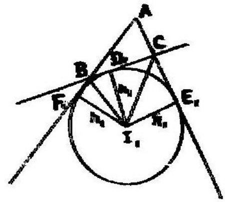
இப்பொழுது $I_1D_1=I_1E_1=I_1F_1=r_1$ (Aக்கு எதிரே நிற்கும் வெளிவட்டத்தின் ஆரம்)

மேல், $\triangle$ABCன் பரப்பு

= $\triangle ABI_1$ன் பரப்பு + $\triangle ACI_1$ன் பரப்பு − $\triangle BCI_1$ன் பரப்பாகும்,

$=\frac{1}{2}AB.I_1F_1+\frac{1}{2}AC.I_1E_1-\frac{1}{2}BC.I_1D_1$

$=\frac{1}{2}cr_1+\frac{1}{2}br_1-\frac{1}{2}ar_1$



$=\frac{1}{2}r_1\,(c+b-a)$

$=\frac{1}{2}\,r_1\,(c+b+a-2a)=\frac{1}{2}\,r_1\,(2s-2a)$

$=\frac{1}{2}\,r_1\,.\,2(s-a)=\,r_1\,(s-a)$

$\therefore\ r_1\,(s-a)=\Delta$. அஃதாவது, $r_1\ =\dfrac{\Delta}{(s-a)}$

இவ்வாறே $\qquad r_2=\dfrac{\Delta}{s-b}$ என்றும்

$r_3=\dfrac{\Delta}{s-c}$ என்றும் வருவிக்கலாம்.

பல்கலைக் கழகத்து மாதிரி வினாக்கள்

1. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\Delta$ என்று நிறுவுக.

விடை :

$b^2\sin 2C+c^2\sin 2B$

$$=b^2\,.\,2\sin C\cos C+c^2\,.\,2\sin B\cos B$$

$$=b^2\ 2\,.\,\frac{c}{2R}\cos C+c^2\,.\,2.\ \frac{b}{2R}\cos B$$

$$\left[\sin C=\frac{c}{2R}\ \text{ஆதலின்}\right]$$

$$=\frac{bc}{R}\ [b\cos C+c\cos B]$$

$$=\frac{bc}{R}(a)\quad [a=b\cos C+c\cos B\ \text{ஆதலின்}]$$

$$=\frac{abc}{R}=4\Delta \qquad\qquad \left[\Delta=\frac{abc}{4R}\ \text{ஆதலின்}\right]$$

ஆகவே,

$b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\Delta$ ஆகும்.

2. நிரூபிக்க :

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}$$

விடை :

$$\text{இடப்பக்கம்} = (2R\sin B-2R\sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$=2R(\sin B-\sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$=2R.\left[2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right]\cos\frac{A}{2}$$

$$=2R\left[2\cos\left(90-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}\right]\cos\frac{A}{2}$$

$$=2R\left[2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right]\sin\frac{B-C}{2}$$

$$=2R(\sin A)\sin\frac{B-C}{2}$$

$$=(2R\sin A)\sin\frac{(B-C)}{2}$$

$$=a\sin\frac{B-C}{2}\qquad\left[\because\ \frac{a}{\sin A}=2R\right]$$

=வலப்பக்கம்

$\therefore\quad (b-c)\cos\frac{A}{2}=a\ \sin\frac{B-C}{2}$ ஆம்,

3. நிரூபிக்க : $(r_1-r_1)(r_3+r_3)=a^2$

விடை :

$$\text{இடப்பக்கம்} =\left[\frac{\Delta}{s-a}-\frac{\Delta}{s}\right]\left[\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}\right]$$

$$=\frac{\Delta[s-(s-a)]}{s(s-a)}\times\frac{\Delta[s-c)+(s-b)]}{(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{\Delta a}{s(s-a)} \times \frac{\Delta[2s-b-c]}{(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{\Delta a}{s(s-a)} \times \frac{\Delta \cdot a}{(s-b)(s-c)} \left[\because \quad a+b+c=2s\right]$$

$$= \frac{\Delta^2 a^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{\Delta^2 a^2}{\Delta^2} \quad \left[\because \quad \Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right.$$

$= a^2 =$ வலப்பக்கம்

$\therefore$ $\underline{(r_1-r)(r_2+r_3)=a^2}$ ஆம்.

4. நிரூபிக்க :

$$r_1+r_2+r_3-r=4R$$

$$r_1+r_2+r_3-r=(r_1+r_2)+(r_3-r)$$

விடை :

$$=\left(\frac{\Delta}{(s-a)}+\frac{\Delta}{(s-b)}\right)+\left(\frac{\Delta}{(s-c)}-\frac{\Delta}{s}\right)$$

$$= \Delta\left[\frac{(s-b)+(s-a)}{(s-a)(s-b)}\right]+\Delta\left[\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}\right]$$

$$= \Delta \cdot \frac{(2s-b-a)}{(s-a)(s-b)}+\Delta \cdot \frac{c}{s(s-c)}$$

$$= \frac{\Delta c}{(s-a)(s-b)}+\frac{\Delta c}{s(s-c)}$$

$$= \Delta\ c\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\right]$$

$$= \Delta\ c\ \frac{[s(s-c)+(s-a)(s-b)]}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \Delta\ c\ \frac{[s^2-cs+s^2-(a+b)s+ab]}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \Delta\ c\ \frac{[2s^2-s(a+b+c)+ab]}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \Delta\, c \frac{[2s^2 - 2s^2 + ab]}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{\Delta \,.\, abc}{\Delta^2} = \frac{abc}{\Delta} = 4R.$$

$\therefore$ $\underline{r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R}$ ஆம்.

5. $rr_1 = r_2 r_3$ ஆனால், $\angle A = 90°$ ஆம் என்று நிரூபி.

விடை :

நாம் $r = \frac{\Delta}{s}$; $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$; $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$; $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$

எனவாதலறிவோம்.

$\therefore$ $rr_1 = r_2 r_3$ என்றதால்

$\frac{\Delta}{s} . \frac{\Delta}{(s-a)} = \frac{\Delta}{(s-b)} . \frac{\Delta}{(s-c)}$ எனவரும்.

அதாவது, $\frac{\Delta^2}{s(s-a)} = \frac{\Delta^2}{(s-b)(s-c)}$ ஆம்.

ஆகவே. $\Delta^2 . (s-b)(s-c) = \Delta^2 . s(s-a)$

$(s-b)(s-c) = s(s-a)$

$(s-b)(s-c) - s(s-a) = 0$

$[s^2 - (b+c)s + bc] - [s^2 - as] = 0$

$s^2 - s^2 - (b+c)s + bc + as = 0$

$s[-(b+c) + a] + bc = 0$

அல்லது $\frac{(a+b+c)}{2} [a - (b+c)] + bc = 0]$

$[\because \quad 2s = (a+b+c)]$

$[a + (b+c)][a - (b+c)] + 2bc = 0$

$a^2 - (b+c)^2 + 2bc = 0$

$a^2 - [(b+c)^2 - 2bc] = 0$

$a^2 - [b^2 + c^2 + 2bc - 2bc] - 0$

$a^2 - (b^2 + c^2) = 0$

ஆகவே, $a^2=b^2+c^2$ ஆம்.

$\therefore \quad \angle A=90^\circ$ ஆம்.

பயிற்சி 6

1. நிரூபிக்க :

(i) $a \sin(B-C)+b\sin(C-A)+C\sin(A-B)=0$

(ii) $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

(iii) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}=b^2\dfrac{\sin(C-A)}{\sin B}=c^2\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$

(iv) $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0.$

(v) $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

(vi) $\Sigma a(b^2+c^2)\cos A=3abc$

(vii) $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$;

(viii) $\Sigma\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=0$

(ix) $\Sigma\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0$

(x) $\Sigma\dfrac{b^2-c^2}{\tan A}=0$

(xi) $\Sigma a^2(\cos^2B-\cos^2C)=0$

2. நிரூபிக்க :

(i) $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2$

(ii) $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0.$

(iii) $a+b+c=\dfrac{abc}{2Rr}$, அஃதாவது, $4Rs=abc$

(iv) $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$

(v) $(r_1-r)(r_2+r_3)=a^2$

(vi) $\dfrac{(ab-r_1r_2)}{r_3}=\dfrac{\Delta}{s}$

(vii) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c.$

(viii) $r\,r_1\,r_2\,r_3=\Delta^2$

(ix) $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}$

(x) $\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}+\dfrac{1}{r_3^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$

(xi) $rr_1+r_2r_3=bc$; (xii) $a(rr_1+r_2r_3)=b(rr_2+r_3r_1)$

(xiii) $r(r_1+r_2+r_3)=ab+bc+ca-s^2$ (xiv) $r_1\,r_2\,r_3=rs^2$

(xv) $\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)\left(\dfrac{1}{r_3}+\dfrac{1}{r_1}\right)=\dfrac{64R^3}{a^2b^2c^2}$

(xvi) $\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}\right)\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_3}\right)=\dfrac{abc}{\Delta^3}.$

(xvii) முக்கோணத்தின் உள், வெளி வட்டங்களின் பரப்புக்கள் முறையே A, A_1, A_2, A_3 ஆனால், $\dfrac{1}{\sqrt{A_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{A_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{A_3}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ ஆமென நிருபி.

3. ΔABCன் பரப்பானது

(i) $2R^2\sin A\sin B\sin C$

(ii) $\frac{1}{4}(b^2\sin 2C+c^2\sin 2B)$

(iii) $\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\,.\,\sin B}{\sin(A-B)}$

(iv) $\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\cot B+\cot C}$ என நிரூபிக்க.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே 13, 14, 15 அடிகளானால், R; r; r_1; r_2; r_3 ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

[விடை : $R=65/8'$; $r=4'$; $r_1=\frac{21}{2}'$; $r_2=12$; $r_3=14$]

5. A, B, C என்னும் கோண முனைகளிலிருந்து அவற்றின் எதிருறு பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p_1, p_2, p_3 ஆனால், $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$ ஆகுமென்று நிரூபிக்க.

6. நிரூபிக்க :

(i) $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$

(ii) $(a^2-b^2+c^2)\tan B=(a^2+b^2-c^2)\tan C$

7. காட்டுக :

(i) $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}$

(ii) $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$

(iii) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

(iv) நிரூபிக்க : $R(a^2+b^2-c^2)=abc(\cot A+\cot B+\cot C)$

8. ABC, A′B′C′ என்னும் இரண்டு முக்கோணங்களில் $\angle B=\angle B'$ ஆகவும், $\angle A$, $\angle A'$ என்பன மிகைநிரப்புக்கோணங்களாகவும் (Supplementary) இருந்தால், $aa'=b'b'+cc'$ ஆகும் என்று நிரூபி.

9. O என்பது $\triangle ABC$ ன் வெளிச் சுற்றுவட்டத்தின் மையமாகவும், R_1, R_2, R_3 என்பன முறையே $\triangle BOC$, $\triangle COA$, $\triangle AOB$ ஆகியவற்றின் சுற்று வட்டங்களின் ஆரங்களும் ஆகுமானால்,

$\frac{a}{R_1}+\frac{b}{R_2}+\frac{c}{R_3}=\frac{abc}{R^3}$ ஆகுமென்று நிரூபி.

10. நிரூபிக்க :

(i) $(b-c)\cos\frac{1}{2}A = a\sin\frac{1}{2}(B-C)$

(ii) $a\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

(iii) $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

(iv) $a(\cos C-\cos B) = 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

(v) $a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

(vi) $b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2} = s.$

11 ABC என்னும் முக்கோணமானது $a\cos A = b\cos B$ ஆகுமாறு அமைந்திருந்தால், அது இரு சமபக்க முக்கோணமாகவோ அல்லது நேர்க்கோண முக்கோணமாகவோ இருக்க வேண்டுமெனக் காட்டுக.

12. a^2, b^2, c^2 என்பன கூட்டுவிருத்தியிலிருந்தால், cot A, cot B, cot C என்பனவும் கூட்டு விருத்தியில் நிற்குமெனநிறுவுக.

13. யாதொரு முக்கோணத்திலும்

(i) $\angle A = 90°$ ஆனல், அப்பொழுது $rr_1 = r_2 r_3$ ஆகும் என்றும்

(ii) $rr_1 = r_2 r_3$ ஆனல், அப்பொழுது $\angle A = 90°$ ஆகுமென்றும் காட்டுக.

(iii) $r_1 = r_2+r_3+r$ ஆனல், அப்பொழுது $\angle A = 90°$ ஆகுமென்றும் நிரூபி.

14. ஒரு முக்கோணத்தில்,

$b^2\cos^2A - a^2\cos^2B = b^2-a^2$ ஆகுமென்று காட்டுக.

15. யாதொரு முக்கோணத்திலும்,

$a(b\cos C - c\cos B) = b^2-c^2$ என அமையுமென நிரூபிக்க.

16. $A = 60°$ ஆனல் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $(a+b+c)(b+c-a)+3bc$

(ii) $b+c = 2a\cos\frac{B-C}{2}$

VII. முக்கோணங்களின் தீர்வுகள்
(Solution of triangles) (ஈரடிவகையும் சேர்ந்து)

எந்த முக்கோணத்திலும் மூன்று பக்கங்களும், மூன்று கோணங்களும் அம் முக்கோணத்தின் உறுப்புக்களெனப்படும். மூன்றுறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றைக்கொண்டு ஏனைய வுறுப்புக்களையும் கணித்தறியும் முறையே முக்கோணத்தின் தீர்வு காணுதல் எனப்படும்.

வகை I. மூன்று பக்கங்களை (a, b, c) க் கொடுத்த விடத்து முக்கோணத்தைத் தீர்வு காணுதல் :

A, B என்னுங்கோணங்களை $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$; $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ என்னுஞ் சூத்திரங்களைக் கொண்டு காணலாம். இங்கு s என்பது முக்கோணத்தின் சுற்றளவில் பாதியாகும்.

மூன்று கோணங்களின் கூட்டுப்பலன் 180° ஆதலால், C என்னும் மூன்றுவது கோணம் அறியப்படும்.

குறிப்பு : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ என்ற சூத்திரத்தைக்கொண்டும் A என்னுங் கோணத்தைக் கவணித்துக் கொள்ளலாம். இச்சூத்திரம் இலாகிருத கணக்கீட்டுக்கு இயலுவதாகாது. எனினும், a, b, c க்கள் சிறிய எண்களாகியவிடத்து இதனைப் பயன்படுத்தலாம்.

$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ என்னுஞ் சூத்திரத்தை வருவித்தல்

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a-b-c)}{2bc}$$

$$= \frac{2(s-c) \,.\, 2(s-b)}{2bc} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$$

$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = + \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ ஆம். (i)

குறிப்பு : $A < 180^\circ \qquad \therefore \quad \frac{A}{2} < 90^\circ$

$\therefore \quad \sin \frac{A}{2}$ தனராசியாகும். $\therefore \quad \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ தனராசி யாகும். மறுபடியும்,

$$2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2s \,.\, 2(s-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2} = +\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \text{(ii)}$$

இனி (i), (ii) என்றவற்றால்,

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

மாதிரி விஞ

$a=68{\cdot}47$, $b=92{\cdot}68$, $c=71{\cdot}42$ என்பன கொண்டு முக்கோணத்தைத்தீர் வுகாண்க.

$2s=232.57$ அதாவது, $s=116{\cdot}285$

$$\therefore \quad (s-a)=116{\cdot}285-68{\cdot}470=47{\cdot}815$$
$$(s-a)=116{\cdot}285-92{\cdot}680=23{\cdot}605$$
$$(s-c)=116{\cdot}285-71{\cdot}420=44\ 865 \text{ ஆம்.}$$
$$\log s=\log 116{\cdot}285=2{\cdot}0656$$
$$\text{iog}(s-a)=\log 47{\cdot}815=1{\cdot}6795$$
$$\log(s-b)=\log 23{\cdot}605=1{\cdot}3730$$
$$\log(s-c)=\log 44{\cdot}865=1{\cdot}6519$$

இனி, $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a}}$ ஆதலால்,

$$\log\tan\frac{A}{2}=\tfrac{1}{2}[\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[1{\cdot}3730+1{\cdot}6519-2{\cdot}0656-1{\cdot}6795]$$
$$=\tfrac{1}{2}[3{\cdot}0249-3{\cdot}7451]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\bar{1}{\cdot}2798]=$$
$$=\bar{1}{\cdot}6399$$

$\therefore \quad \frac{A}{2} = 28°35'$ அல்லது $A = 47°10'$

மேலும், $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ ஆதலின்,

$$\log\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left[\log(s-c)+\log(s-a)-\log s-\log(s-b)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\log 44\cdot865+\log 47\cdot815-\log 116\cdot285 -\log 23\cdot605$$

$$= \tfrac{1}{2}[1\cdot6519+1\cdot6795-2\cdot0656-1\cdot3730]$$

$$= \tfrac{1}{2}[3\cdot3314-3\cdot4386]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\bar{1}\cdot8928] = \bar{1}\cdot9464)$$

$\therefore \quad \frac{B}{2} = 41°28'$; அல்லது $B = 82°56'$

$\therefore \quad C = 180° - (A+B) = 180° - (47°10' + 82°56')$

$= 180° - 130°6' = 49°54'$

$\therefore$ எனவே, மூன்று பக்கங்களைக்கொண்டு, ஏனைய உறுப்புக்களாகிய மூன்று கோணங்களையும் தீர்வு கண்டபொழுது

$\angle A = 47°10'$, $\angle B = 82°56'$, $\angle C = 49°54'$ என வரக்கண்டோம்.

பயிற்சி 7·1

1. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 2, 3, 4 ஆனால் அதன் மிகப் பெரிய கோணத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை: 104° 29′]

2. முக்கோணத்தை விடுவிக்க: $a = 7\cdot8''$, $b = 5\cdot6''$, $c = 4\cdot5''$

[விடை: $A = 100°33'$; $B = 44°54'$; $C = 34°33'$]

3. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 7, $4\sqrt{3}$, $\sqrt{14}$ ஆகிய பொழுது அதன் மிகச்சிறிய கோணத்தைக் கண்டறிக.

[விடை: 30°]

4. $a=345{\cdot}6$; $b=456{\cdot}6$; $c=567{\cdot}8$ என்று கொடுக்கப் பெற்ற வழி முக்கோணத்தைத் தீர்வுகாண்க. M. U. 1946

[விடை: A = 37° 30′; B = 53° 32′; C = 88° 58′]

5. $a=7{\cdot}53$; $b=3{\cdot}75$; $c=8{\cdot}72$ எனப்பக்கங்களைப் பெற்றிருக்கும் முக்கோணத்தை விடுவிக்க.

[விடை: A = 59° 18′; B = 25° 21′; C = 95° 21′]

6. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 4 : 5 : 6 என்னும் விகிதத்திலிருக்குமானால், அதன் ஒரு கோணம் மற்றொரு கோணத்திற்கு இருமடங்காகுமெனக் காட்டுக. M. U. 1947.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் x^2+x+1; $2x+1$, x^2-1 என்பனவானால் மிகப்பெரிய கோணம் 120° ஆகுமென்று காட்டுக.

8. ஒரு முக்கோணத்தில் $a=68{\cdot}47$; $b=92{\cdot}68$, $C=71{\cdot}42$ என்று கொடுக்கப்பட்டன கொண்டு அதனை விடுவிக்க.

[விடை: A = 47°10′; B = 82°58′; C = 49°52′]

2. வகை II: b, c என்னும் இரண்டு பக்கங்களும், அவை அகப்படுத்தி நிற்கும் A என்னுங் கோணத்தையுங்கொண்டு, முக்கோணத்தைத் தீர்வு காணுதல்:

$b > c$ ஆனால், $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ஆதலறிவோம். (i)

$\frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2}$ ஆகும். (ii)

இவ்விரு தொடர்புகளைக் கொண்டு B, C என்னும் கோணங்களைக் கணக்கிட்டுக் காணலாம். அதற்குமேல், மூன்றாவது பக்கமாகிய a ஐ அறிய $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ என்றதைப் பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு: a என்னும் பக்கத்தை $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் அறியலாம். bயும் cயும் சிறிய எண்களாகாவிடத்து இச் சூத்திரம் உழைப்பைப் பெருக்குவதாகும். மேலும், இருலாகிருத கணக்கீட்டுக்கு இது பயன்படுமாறு இல்லை.

இனி, $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ஐ வருவித்தல்.

வலப்பக்கம் $=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

$$=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin B+2R\sin C}\cdot\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R(\sin B+\sin C)}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\cdot\tan\frac{B-C}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B-C}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}$$

$$=\tan\frac{B-C}{2}$$

= இடப்பக்கத்துப் பரிமாணம்.

மாதிரி வினு

$a=38\cdot8$; $b=42\cdot9$; $C=38°\ 16'$ எனக் கொடுக்கப்பட்டன வற்றைக் கொண்டு, அவற்றையுடைய முக்கோணத்தைத் தீர்வு காண்க.

இங்கு விடை :

$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ என்றதனை உபயோகிக்கலாம்,

ஆகவே

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{38\cdot8-42\cdot9}{38\cdot8+42\cdot9}\cot\frac{38°16'}{2}$$

$$=-\frac{4\cdot1}{81\cdot7}\cot\frac{38\cdot16'}{2}$$

இங்கு

$\tan\frac{B-A}{2}=-\tan\frac{A-B}{2}$ ஆகும். $[\tan(-\theta)=-\tan(\theta)]$ ஆதல் காண்க.

$$\therefore\quad \tan\frac{B-A}{2}=\frac{4\cdot1}{81\cdot7}\cot\frac{38°\ 16'}{2}=\frac{4\cdot1}{81\cdot7}\cot 19°\ 8' \text{ ஆகும்.}$$

$$=\frac{4\cdot1}{81\cdot7}\tan 70°\ 52' \qquad (\cot\theta=\tan(90-\theta)$$

ஆதலின்)

இனி, இருபக்கங்களிலும் இலாகிருதங்காண

$$\log\tan\frac{B-A}{2}=\log 4\cdot1+\log\tan 70°\ 52'-\log 81\cdot7$$

$$=0\cdot6128+0\cdot4597-1\cdot9122$$

$$=\bar{1}\cdot1603=\log\tan 8°\ 14'$$

$$\therefore\quad \frac{B-A}{2}=8°\ 14'' \text{ அல்லது } B-A=16°\ 28'$$

மேல் $B+A=180-C=180-38°16'=141°\ 44'$ ஆம்.

ஆகவே, $B-A=16°\ 28'$

$B+A=141°\ 44'$

என்பவற்றைக் கூட்டுதலும், கழித்தலும் செய்ய

$A=62°\ 38'$, $B=79°\ 6'$ என வரக் காண்கின்றோம்.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

அதாவது $\dfrac{38\cdot8}{\sin 68^\circ38'} = \dfrac{C}{\sin 38^\circ\ 16'}$

$$C = \frac{38\cdot8 \sin 38^\circ\ 16'}{\sin 62^\circ\ 38'}$$

இருபக்கங்களிலும் இலாகிருதங்காண

$$\log C = \log 38\cdot8 + \log \sin 38^\circ\ 16' - \log \sin 62^\circ\ 38'$$
$$= 1\cdot5888 + \bar{1}\cdot7919 - \bar{1}\cdot9484$$
$$= 1\cdot4323$$

$\therefore \qquad C = 27\ 06.$

பயிற்சி 7·2

1. $b=215$, $c=105$, $A=74^\circ\ 27'$ ஆனால், எஞ்சிய கோணங்களை யும் மூன்ருவது பக்கம் 'a' யையுங் கண்டறிக.

[விடை: $B=77^\circ\ 7'$; $C=28^\circ\ 26'$; $a=212\cdot48$]

2. $a=36\cdot21$; $c=30\cdot14$; $B=78^\circ\ 10'$ என்று கொடுக்கப் பட்டால் முக்கோணத்தைத் தீர்க்க.

[விடை: $A=57^\circ\ 21'$; $\angle C=43^\circ\ 29'$; $b=42\cdot09$]

3. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் 7:9 என்னும் விகிதத்திலும் அவற்றின் இடைக்கோணம் $64^\circ\ 12'$ ஆகவு மிருந்தால் மற்ற கோணங்களைக் கண்டறிக.

[விடை: $69^\circ\ 10'$; $46^\circ\ 38'$]

4. $b=1$; $c=\sqrt{3}$; $A=30^\circ$ ஆகுமானல், முக்கோணத்தை விடுவிக்க.

[விடை: $B=30^\circ$; $C=120^\circ$; $a=1$]

5. ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்கள் 9'ம் 3'ம் ஆகும். அவற்றின் எதிர் கோணங்களின் வித்தியாசம் 90° ஆகும். எனின், முக் கோணத்தை விடுவிக்க.

[விடை; $A=53^\circ 8'$; $B=108^\circ 26'$; $C=18^\circ 26'$; $a=7.6'$ சுமாராக]

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டன வற்றைக்கொண்டு முக்கோணங்களை விடுவிக்க :

(i) $a=\sqrt{3}+1$; $b=\sqrt{3}-1$; $C=60°$

(ii) $b=1$; $c=\sqrt{3}-1$; $A=60°$

7. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கூட்டுவிருத்தி (A.P) யி லுள்ளன. மிகப்பெரிய மிகச்சிறிய பக்கங்கள் முறையே 24செ.மீ; 16செ மீ. ஆனால் முக்கோணத்தை விடுவிக்க.

விடை : 60° ; 79° 6′; 40°54′ மூன்றும் பக்கம் a $8\sqrt{7}$செ.மீ]

8. முக்கோணங்களைக் கொடுத்த வுறுப்புக்களைக் கொண்டு விடுவிக்க :

(i) $b=456{\cdot}1$; $c=296{\cdot}8$; $A=74°\ 20'$

[விடை : $B=68°\ 26'$; $C=37°\ 14'$; $a=472{\cdot}3$]

(ii) $a=25{\cdot}7$; $b=36{\cdot}8$; $C=56°\ 27'$

[விடை ; $A=43°\ 28'$; $B=80°\ 5'$; $C=31{\cdot}13$]

வகை III

ஒரு பக்கமும் இரண்டு கோணங்களும் கொண்டு முக்கோணத் தைத் தீர்வு காணுதல். இங்கு, கொடுக்கப்பட்டவை a, B, c என்பன வாகுக.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூட்டுப் பலன் இரண்டு நேர்க்கோணங்களாகுமாதலால், மூன்றுவது கோணமும் கொடுக்கப்பட்டதேயாகும். இனிக் கண்டறிய வேண்டியன இரண்டு பக்க வுறுப்புக்களேயாகும். அவற்றை $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$ என்னு தொடர்பால் அறியலாம்.

ஆகவே,

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A};\ c=a\frac{\sin C}{\sin A}$$ ஆகும்.

மாதிரி வினா

ஒரு முக்கோணத்தில் $a=567$: $\angle B=57^\circ\ 13'$, $\angle C=78^\circ\ 6'$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணத்தைத் தீர்வு காண்க.

விடை :

$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-135^\circ\ 19'=44^\circ\ 41'$

இனி, $b=a\dfrac{\sin B}{\sin A}$ ஆதலின்,

$$\begin{aligned}\log b&=\log a+\log\sin B-\log\sin A\\&=\log 567+\log\sin 57^\circ\ 13'-\log\sin 44^\circ\ 41'\\&=2{\cdot}7536+\bar{1}{\cdot}9247-\bar{1}{\cdot}8470\\&=2{\cdot}6783-\bar{1}{\cdot}8470\\&=2{\cdot}8313\end{aligned}$$

$\therefore\quad b=$ எதிர் $\log 2{\cdot}8313=678{\cdot}1$

மேல் $c=a\dfrac{\sin C}{\sin A}$ ஆதலின்,

$$\begin{aligned}\log c&=\log a+\log\sin C-\log\sin A\\&=\log 567+\log\sin 78^\circ\ 6'-\log\sin 44^\circ\ 41'\\&=2{\cdot}7536+\bar{1}{\cdot}9906-\bar{1}{\cdot}8470\\&=2{\cdot}7442-\bar{1}{\cdot}8470=2{\cdot}8972\end{aligned}$$

$\therefore\quad c=$ எதிர் $\log 2{\cdot}8972=789{\cdot}3$

ஆகவே, தீர்வுகண்ட வழி பெறப்பட்டவை

$\angle A=44^\circ\ 41$, $b=678{\cdot}1$, $c=789{\cdot}3$ ஆம்.

பயிற்சி 7·3

1: ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தைச் சார்ந்த கோணங்கள் $129^\circ\ 23'$ ம், $38^\circ\ 36'$ ம் ஆம். அடிப்பக்கம் 7 செ.மீ· நீளமானதாகும். எனின், அதன் மிகப்பெரிய பக்கத்தை அறிக.

[விடை : $a=20{\cdot}97$ செ மீ.]

2. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 12″. அதன் முக்கோணங்களு ளிரண்டு 47° ம் 53° ம் ஆகும். அதன் பக்கங்களைக் காண்க.

[விடை : 3·48 ; 3·82 ; 4·70]

3. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 5 : 10 : 21 என்ற விகிதத்தி லுள்ளன. மிகச்சிறிய கோணத்திற்கு எதிர்நிற்கும் பக்கம் 3 செ.மீ. ஆகும் மற்ற பக்கங்களைக் கண்டறிக.

[விடை : 5·44 ; 6·86]

4. A=61°, B=37°, $a-b=372$ ஆனால், a, b க்களை அறிக.

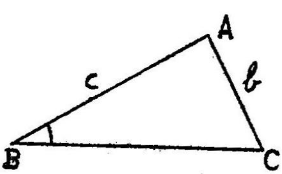
[விடை : $a=1192$, $b=821$]

5. A=35° 17′; C=45° 13′, $b=42·1$ என்பனவானால், அம் முக்கோணத்தை விடுவிக்க.

[விடை : $a=24·65$, $c=30·30$; B=99° 30′]

6. Pயிலிருந்து Rக்கு உள்ள தூரத்தைக் கண்டு பிடிக்குங்கால் ஏற்புடையதொரு திசையில் PQ என்னும் தூரம் 100 கெஜமுள்ளதாகக் கொண்டு பார்க்கையில் P என்னுமிடத்தில் ∠QPR = 41° 18′ ஆகவும், Q என்னுமிடத்தில் ∠PQR = 114° 31′ ஆகவும் தோன்றினால், PR ன் தூரமென்ன ?

வகை IV



இரண்டு பக்கங்களும், அவற்றுள் ஒன்றின் எதிர்நிலைக் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டால், முக்கோணத்தைத் தீர்வு காணுதல். (b, c, ∠B என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்க). இது ஈரடிவகை (Ambiguous case)க்கு இடங்கொடுக்கும்.

C என்னுங்கோணம் $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$ என்னும்தொடர்பைக்கொண்டு அறியப்படும். ஆகவே $\sin C = \frac{c}{b} \sin B$ ஆம். (i)

இனி இலாகிருத முறையால் ∠C ஐ அறியலாம்.

மேற்காட்டிய சமன்பாடானது $\angle C$க்கு ஒரு சமயம் யாதொரு மதிப்பும் பெறமாட்டாமையாகிய நிலைமையை யுண்டாக்கும். ஒரு சமயம் ஒரே மதிப்பைத் தரும், சில சமயங்களில் இரண்டு மதிப்புக்களைப் பெறுதற்கு இடமுழுந்தந்துவிடும். இரண்டு மதிப்புக்கள் பெறவந்தவிடத்து அவை ஒன்றற்கொன்று மிகை நிரப்புக்கோணங்க ளாகவே (Supplementary angles) அமையும். அவ்விருவகை மதிப்புக்களை C_1, C_2 என்று குறித்துக்கொள்ளுமிடத்து, C_1 ஆனது $90°$க்குக் குறைந்திருந்தால், C_2 என்பது C_1ன் மிகைநிரப்புக்கோணமாக நிற்கும். இது பற்றி எஞ்சி நின்ற பிறிதொரு கோணவுறுப்பாகிய Aக்கும் இரண்டு மதிப்புககள் பெறப்படும். அவை, A_1, A_2 என்பனவானால், $A_1 = 180 - B - C_1$ம்; $A_2 = 180 - B - C_2$யும் ஆகும். மேல், அடுத்துக் கண்டறிய நிற்பது a என்னும் பக்கவுறுப்பாகும். இது,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$ என்னும் தொடர்பு பற்றி அறியப்படும்.

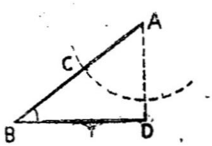
ஆகவே, $a = b\dfrac{\sin A}{\sin B}$ ஆம்.

A என்னும் கோணத்திற்கு இருவகையான மதிப்புக்கள் வாய்த்தலால், அதற்கு எதிருற்று நிற்கும் a என்னும் பக்கத்திற்கும் இரண்டு அளவுகள் வந்து எய்தும்.

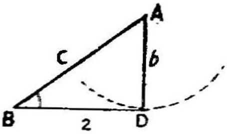
இங்ஙனம், ஈரடிவகையான் இருவகைப்பட்ட தீர்வுகள் ஏற்படுதற்குரிய நிபந்தனைகளைக் காண்போம்.

முதலில் B என்பது குறுங்கோணம் ஆகுக.

(i) $b < c \sin B$ ஆனால், (i)ல் வலப்பக்கத்துப் பின்னுறுப்பானது ஒன்றுக்கு அதிகப்பட்டதாகும். இந்நிலையில், $\sin C$ யின் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்படவரும். அது கூடாமையால், Cயின் மதிப்பு காணுதற்கு அரிதாகும். இந்நிலையில் முக்கோணம் அமையுமாறில்லை.



(ii) $b = c \sin B$ ஆனல், அப்பொழுது, $\sin C = 1$ ஆகும். இது ஏற்கும். அதனல், $C = 90°$ ஆகும். இந்நிலையில் ஒரேவொரு நேர்க் கோண முக்கோணமே அமைவதாகும்.

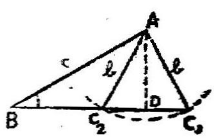


(iii) $b > c \sin B$ ஆனல், $\sin C$ ஆனது ஒரு தனராசி விகித மாகும். முதலிரு கால்வட்டங்களில் sine தகவு எப்பொழுதுமே தன ராசியாகுமாதலால், Cக்கு 0°க்கும் 90°க்கும் இடையில் ஒரு மதிப்பும், 90°க்கும் 180°க்கு இடையில் மற்ருெரு மதிப்பும் காணக் கிடைக்கும். எனினும், இவ்விரு மதிப்புக்களும் எப்பொழுதுமே ஏற்கப்பட்டு நில்லா என்க. இந்நிலைமையை மேலும் ஆராய்வோம்

(a) $b > c \sin B$ யும் $b < c$ யும் ஆகுக. அப்பொழுது $\angle B$ ஆனது $\angle C$ க்குக் குறைந்தே நிற்பதாக வரும்.

B குறுங்கோணமாகக் கொள்ளப்படுதலால், அது Cயின் குறுங் கோணத் தகவுக்குக் குறைந்திருக்கக் கூடும்; இதுபற்றி Cயின் விரி கோணத் தகவுக்கு இயல்பாகக் குறைவுற்றே நிற்பதாகும்.

இங்ஙனம், Cயின் இருவகை மதிப்புக்களும் உடன்பாடாகும். ஆகவே, Aக்கு இரண்டு மதிப்புக்கள் உளவாக, அவைபற்றி (2)ல் கொடுத்த தொடர்பானது 'a'க்கு இரண்டு மதிப்பைத் தரும். இவ்வகையில் இரண்டு முக்கோணங்கள் உருவாகிக், கொடுத்த நிபந்தனை களுக்குப் பொருந்த நிற்கும்.



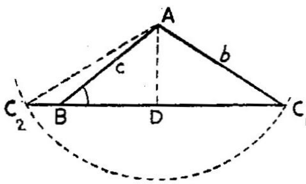
(b) $b > c \sin B$ யும், $b > c$ யும் ஆகுக.

அப்பொழுது $\angle B > \angle C$ ஆம். இவ்வகையில், Cயின் விரி கோணத் தகவு ஏற்றுக்கொள்ள நில்லாது. ஏனெனில் $\angle B$ குறுங்கோண மாகக் கொள்ளப்பட்டபொழுது, Cயின் விரிகோணத் தகவுக்கு அதிகப் பட்டு நிற்றல் இயலாததாகும்.

இரண்டாவதாக, B ஒரு விரிகோணமானுல்

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரேவொரு விரிகோணமே நிற்றற்கு இயலு மாதலின், Cயின் குறுங்கோணத் தகவொன்றே ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

இதுபற்றி $b > c \sin B$ யும், $b > c$ யும் ஆகியவிடத்து நாம் ஏற்புடைய இரண்டு திர்வுகளைப் பெறுகின்றோம்.



குறிப்பு: b, c, B என்னும் மதிப்புக்களுக்கு ஒரு முக்கோணத்தைத் தீர்வு காணுதற்கண் ஐயப்பாடு அல்லது ஈரடிவகைத் தன்மை விளைதலால், அத்தகைய வகைகள் முக்கோணங்களின் விடுவிப்பில் ஈரடி வகைகள் (Ambiguous case of the solution of triangles) எனப்படும்

மாதிரி வினுக்கள்

1. $a=2,\ c=\sqrt{3}+1,\ A=45^\circ$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட விடத்து, முக்கோணத்தை விடுவிக்க.

விடை :

$$c \sin A = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(2 \cdot 4495 + 1 \cdot 4142)$$

$$= 1 \cdot 9318$$

நாம், $a > c \sin A$ ஆகவும், $a < c$ ஆகவும், A ஒரு குறுங்கோண மாகவும் பெற்றுள்ளோம். ஆகவே, இரண்டு வகைத் தீர்வுகள் வரும்.

$$\sin C = \frac{c}{a} \sin A = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\therefore\ C_1=75^\circ;\quad C_2=105^\circ$ எனவரும்.

$\therefore\ B_1=60^\circ;\quad B_2=30^\circ$ எனவரும்.

$$\therefore\ b_1=\frac{a\sin B_1}{\sin A}=\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

$$b_2=\frac{a\sin B_2}{\sin A}=\left(2\times\frac{1}{2}\right)\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ஆகவே, முற்றுறத் தீர்வு கண்ட வழிப்பெறும் அளவுகளாவன :

$a=2$	$A=45^\circ$
$b=\sqrt{6}.\ \sqrt{2}$	$B=60^\circ;\ 30^\circ$
$c=\sqrt{3}+1$	$C=75^\circ;\ 105^\circ$ ஆம்.

2. $a=94\cdot2,\ b=141\cdot3;\ \angle A=40^\circ$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட விடத்து, முக்கோணத்தை விடுவிக்க :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

அல்லது $\sin B=b\sin A/a=141\cdot3\times\sin 40^\circ/94\cdot2$

$$\log\sin B=\log 141\cdot3+\log\sin 40^\circ-\log 94\cdot2$$
$$=2\cdot1501+\bar{1}\cdot8081-1\cdot9741$$
$$=\bar{1}\cdot9841$$
$$\therefore\ B=74^\circ36'\text{ or }105^\circ24'$$

வகை I

$:\ a=94\cdot2,\ b=141\cdot3,\ A=40^\circ,\ B_1=74^\circ36'$

$$\therefore\ C_1=180^\circ-(40^\circ+74^\circ36')$$
$$=180^\circ-(114^\circ36')$$
$$=65^\circ24'$$

மற்றும் $a/\sin A=c_1/\sin C_1$

$\therefore\ c_1=a\sin C_1/\sin A=94\cdot2\times\sin 65^\circ24'/\sin 40^\circ$

$$\log C_1=\log 94\cdot2+\log\sin 65^\circ24'-\log\sin 40^\circ$$
$$=1\cdot9741+\bar{1}\cdot9587+\bar{1}\cdot8081$$
$$=1\cdot9328-\bar{1}\cdot8081$$
$$=2\cdot1247$$

c_1 = antilog 2·1247 = 133·2

வகை II

$a = 94{\cdot}2,\ b = 141{\cdot}3,\ A = 40°,\ B_2 = 105°24'$

$C_2 = 180° - (40° + 105°24')$

$= 180° - (145°24')$

$= 34°36'$

$a/\sin A = c_2/\sin C_2$ என்பதிலிருந்து

$c_2 = a \sin C_2/\sin A = 94{\cdot}2 \times \sin 34°36'/\sin 40°$

$\log c_2 = \log 94{\cdot}2 + \log \sin 34°36' - \log \sin 40°$

$= 1{\cdot}9741 + \bar{1}{\cdot}7542 - \bar{1}{\cdot}8081$

$= 1{\cdot}7283 - \bar{1}{\cdot}8081$

$= 1{\cdot}9202$

c_2 = antilog 1·9202

$= 83{\cdot}22$

பயிற்சி 7·4

1. $a=5,\ b=7,\ \sin A = {\cdot}75$ என்ருல், முக்கோணம் ஈரடி வகையா எனக் கண்டறிக.

2. $a=100,\ c=100\sqrt{2},\ A=30°$, முக்கோணத்தைத் தீர்வு காண்க :

[விடை : $C_1 = 135°$; $C_2 = 45°$; $B_1 = 15°$; $B_2 = 105°$; $b_1 = 50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $b_2 = 5°(\sqrt{6}+\sqrt{2})$]

3. $A=30°,\ b=8,\ a=6$ ஆனுல், $\angle C$ ஐக் கண்டறிக :

4. $B=30°;\ b=150;\ c=50\sqrt{3}$ என்பவற்றிற்கு அமைவுடைய முக்கோணங்கள் இரண்டனுள் ஒன்று இருசமபக்க முக்கோணமாகவும், மற்ருென்று நேர்க்கோண முக்கோணமாகவும் காணப்படுமெனக் காட்டுக.

[விடை : $C_1 = 60°$; $C_2 = 120°$; $A_1 = 90°$; $A_2 = 30°$]

5. b 16; $C=25$: $B=33°15'$ என்பன கொண்டு ஈரடி வகை யுண்டாமெனக் காண்பி. முக்கோணத்தின் முழுத்தீர்வைக் கண்டறிக

[விடை: $C_1=58°57'$: $C_2=121°3'$ முதலாயின]

6. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் 5374·5 அடியும், 1586·5 அடியும் ஆகும். பின்னுள்ள அடிககு எதிருறுகோணம் 15° 11, ஆனால், மற்ற வுறுப்புக்களைக் கண்டறிக.

[விடை. $C_1=62°31$: $C_2=117°29'$: $A_1=102°18'$; $A_2=47°20'$]

7. முக்கோணத்தை விடுவிக்க:

(i) $a=4·7$; $c=1·3$; $C=15°$

[விடை $A=69°22'$, $B=95°38'$; $b=4·997$: $A=110°38'$ $B=54°22'$; b 4·083]

(ii) $a=126·3$; b - 178·7; $A=42°13'$

[விடை: $B=71°54'$; $C=65°53$; $c=171·6$; $B=108°6'$ $c=230°41'$: $c=93·09$]

(iii) $b=6·5$; $c=3·3$; $C=30°31°$

[விடை: முக்கோணம் அமையுமாறில்லை]

8. மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் ஒரு கப்பலானது A என்னும் துறைமுகத்தை நோக்கிச் சென்றுகொண்டிருக்கையில், A க்கு நேர். மேற்கில் 10 மைல் தூரத்திலுள்ள B என்னுமிடத்திலிருந்து நோக்கு கையில் கிழக்குக்கு வடப்பக்கம் 42° கோணத்திலுள்ளதாகக் காணப் பட்டது. அக்கப்பலானது முக்கால் மணிக்குப் பிறகு துறைமுகத்தை வந்து சேருமானால், அது முதலில் காணப்பட்டபொழுது B க்கு அப்பால் இருந்த தூரத்தையும், A யிலிருந்து காணப்பட்ட திசைக் கோணத்தையும் கண்டறிக.

9. b, c, B கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $a=c\cos B\pm\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் $b>c\sin B<c$ ஆகும்பொழுது இரண்டு முக்கோ ணங்கள் அமைவுறுதல் சாத்தியமாகுமென வருவிக்க. இந்நிபந்தனை பொருந்துவதானல். A_1, C_1, a_1, A_2, C_2, a_2 என்பன அம் முக்கோ ணங்களின் உறுப்புக்களாகும்எனக்கொண்டு

(i) $a_1 + a_2 = 2c \cos B$

(ii) $a_1 - a_2 = \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$

(iii) $\dfrac{\sin A_1}{\sin C_1} + \dfrac{\sin A_2}{\sin C_2} = 2 \cos B$,

என அமையுமெனக் காட்டுக.

1). ஈரடி வகைகளை வடிவக் கணித முறையால் ஆராய்க.

திரிகோணமிதி

விடைகள்

பயிற்சி 2

2. (i) இரண்டாவது அல்லது நான்காவது கால்வட்டப்பகுதி:

$\sin\theta = \pm\frac{15}{17}$; $\cos\theta = \pm\frac{8}{17}$

(ii) இரண்டாவது அல்லது மூன்றாவது கால்வட்டப்பகுதி;

$\sin\theta = \pm\frac{5}{13}$; $\tan\theta = \pm\frac{12}{13}$.

பயிற்சி 4

1. (*a*) (i) 2 (ii) $-\sqrt{2}$ (iii) 0 (iv) -1 (v) 0 (vi) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) 0 (ix) 1 (x) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(*b*) (i) $\sec 0°$ (ii) $\sec 50°$ (iii) $-\sin 10°$ (iv) $-\cot 10°$ (v) $-\sin 3°$ (vi) $\cot 30°$ (vii) $-\cot\frac{\pi}{4}$ (viii) $-\sec\frac{3\pi}{14}$

5. (i) $\theta=210°$ அல்லது $330°$ (ii) $\theta=150°$ அல்லது $330°$ (iii) $60°$ அல்லது 300 (iv) $\theta=225°$ அல்லது $315°$ (v) θ $150°$ அல்லது $210°$ (vi) $\theta=225°$ அல்லது $315°$.

பயிற்சி 5·2

1\. (i) $\tan A/2=2$ or $\frac{1}{2}$; $\sin 2A=\frac{24}{25}$; $\cos 2A=-\frac{7}{25}$; $\tan 2A=-\frac{24}{7}$.

$\sin 3A=\frac{44}{125}$; $\cos 3A=-\frac{117}{125}$; $\tan 3A=-\frac{44}{117}$.

பயிற்சி 5·4

9. (*a*) (i) $\frac{171}{221}$ (ii) $\frac{140}{171}$ (iii) $-\frac{3485}{732}$ (iv) $\frac{35}{221}$ (v) $\frac{196}{221}$

பயிற்சி 5·5

5. (i) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)$

(ii) $\cos(A+B-C)+\cos(A-B+C)-\cos(A+B+C)-\cos(A-B-C)$

கலைச் சொற்கள்

Trigonometry (திரிகோணமிதி) கோண கணிதம்

Ambiguous case	ஈரடி வகை
Angle of depression	இறக்கக் கோணம்
Angle of elevation	ஏற்றக் கோணம்
Anti clockwise	இடஞ்சுழியாக
Appendix	அனுபந்தம் ; பின்னிணைப்பு
Bearing	திசைகோள் : திசைகோணம்
Cardinal points	நாற்றிசைகள்.
Centesimal	நூற்றின் பகுப்பு முறை
Circular measure	வட்டமுறையளவு
Clockwise	வலஞ்சுழியாக
Decagon	தசகோணம்
Degree (angle)	பாகை (கோணம்)
Distance	தூரம்
Elevation	ஏற்றம்
Graph	வரைப்படம்
Horizontal	படுமட்ட ; கிடை ; கிடைக்கோடு, படுக்கைக்கோடு
Minute (angle)	கலை (கோணம்)
Period	போழ்து
Periodical	போழ்தில் மீளும்
Quadrant	கால் வட்டப் பகுதி
Radian	ரேடியன் ; ஆரையன்
Ratio	விகிதம் ; தகவு
Radian measure	ரேடியன் அளவை
Second (angle)	விகலை (கோணம்)
Sexagesimal	அறுபான் பகுப்பு ; ஷஷ்டிப முறை
Submultiple	காரணப் பகுதி
Table	அட்டவணை
Trigonometry	திரிகோணமிதி
sine	நெடுக்கை
cosine	கிடக்கை
Tangent (of an angle)	இருக்கை
cosecant	எதிர் நெடுக்கை
secant (of an angle)	எதிர் கிடக்கை
Co-tangent	எதிரிருக்கை
Unit	அலகு

பிற்சேர்க்கை

இம்மாதிரியான கணக்குகளைப் பொதுவாகப் பின்வருமாறு செய்தல் ஏற்றதாகும் :

(ii) எவ்விரு சகோதரிகளும் சேர்ந்து உட்காரக்கூடாதென்றால், முதலில் 4 சகோதரர்களை $_4P_4$ வழிகளில் அமரச் செய்யலாம். அவர் களுக்கு இடையே 3 வெளியிடங்கள் இருக்கும். இப்பால் முன்னே முகப்பில் ஓர் இடமும், அப்பால் பின்னே இறுதியில் ஓர் இடமும் ஆக 3 சகோதரிகளை அமர்த்த ஐந்து இடங்கள் வாய்க்கின்றன. ஆகவே, 3 சகோதரிகளை $_5P_3$ வழிகளில் அமரச் செய்யலாம். ஆதலால், 4 சகோதரர்களையும் 3 சகோதரிகளையும் குறிப்பிட்ட நிபந்தனையின்படி $_4P_4 \times {}_5P_3 = 4! \times 60 = 24 \times 60 = 1440$ வழிகளில்அமரச் செய்யலாம்.

பக்கம் 24 ல் 22ஆவது வரிக்குப்பின் வகை 3-க்கு மேல் சேர்த்துக் கொள்ளவும்.

$$=[a^p]^s[a^r]^q = a^{ps} \times a^{rq} = a^{ps+rq}$$

$$\therefore \qquad z = [a^{ps+rq}]^{1/qs} = a^{p/q+r/s} = a^{m+n}$$

பிழைதிருத்தம்

[illegible]	வரி	பிழை	திருத்தம்
27	6	$=a^m \times a^p = a^{mn}$	$=a^{m\times(-p)} = a^{mn}$
33	2	delete ஞ்ஜ்ஜியத்திற்குச்	
82	11	$4a^2x^2+abx+4ac=0$	$4a^2x^2+4abx+4ac=0$
85	10	(ii) $b^2-4ac \not> 0$ ஆனல்,	(ii) $b^2-4ac > 0$ ஆனல்,
107	15	$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{2a}\right]$ ஆம்	$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ ஆம்.
168	16, 17	$+\ldots\ldots[a+(n-1)d]^{n-1}$ $+a+(n+d)r^n\}$ ஆகுக.	$+\ldots\ldots[a+(n-1)d]r^{n-1}$ ஆகுக.
..	21	$S_n(1-r)=a+dr+dr^2+\ldots\ \{a+(n-1)d\}\ r^n$	$S_n(1-r)=a+dr+dr^2+\ldots+dr^{n-1}-1$ $\{a+(n-1)d\}\ r^n$
..	23	$S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{1-r^2}-\frac{dr^n}{1-r^2}$ $-\frac{\{a+(n-1)d\}\ r^n}{1-r}$	$S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}-\frac{dr^n}{(1-r)^2}$ $-\frac{\{a+(n-1)d\}\ r^n}{1-r}$
272	14	$=-\sin 227°$	$=\sin 227°$
..	15	$=\sin 47°$	$=-\sin 47°$